

МОДЕЛЮВАННЯ КІНЕТИКИ ЗНЕВОДНЕННЯ ОСАДІВ СТІЧНИХ ВОД МЕТОДОМ РОЗМІРНОСТЕЙ

Орест Вербовський¹, Максим Гавриш², Вадим Орел³

Національний університет "Львівська політехніка"

12, вул С. Бандери, м. Львів, Україна, 79013

¹ канд. тех. наук, доцент, orest.v.verbovnyi@lpnu.ua, orcid.org/0000-0002-0410-7871

² maksym.havrysh.hb.2023@lpnu.ua, https://orcid.org/0009-0000-1650-5781

³ канд. тех. наук, доцент, vadyim.i.orel@lpnu.ua, orcid.org/0000-0002-3518-4597

DOI: 10.32347/2524-0021.2026.53.12-17

Анотація. Зі зростанням населення, розвитком промислового будівництва та прискоренням урбанізації утворення стічних вод щорічно зростає. Так само зростає й кількість осадів стічних вод, зокрема й тих, які містять значну кількість важких металів, патогенів та бактерій. Високий вміст вологи в муніципальних осадах стічних вод створює величезні труднощі для їх безпечної утилізації та подальшого використання. У країнах Євросоюзу складування осадів стічних вод є забороненим. Тому осади вже не нагромаджують на мулових майданчиках, шламонагромаджувачах, відвалах тощо, як це роблять у нашій країні. Отже, виникає необхідність зміни існуючого методу управління цими осадами. Математичне моделювання кінетики зневоднення осадів стічних вод методом розмірностей дозволило отримати функціональну залежність з чисел подібності. Ці числа подібності мають фізичний сенс як співвідношення сил або є аналогами критеріїв подібності. Підтверджено аналогію з фільтрацією при дослідженні компресійно-фільтраційних властивостей суміші осадів стічних вод з Львівських каналізаційних очисних споруд.

Ключові слова: зневоднення, осади стічних вод, вміст води, метод розмірностей, числа подібності.

ВСТУП

Зі зростанням населення, розвитком промислового будівництва та прискоренням урбанізації утворення стічних вод щорічно зростає. Так само зростає й кількість осадів стічних вод. Так, 2020 року в Європейському Союзі кількість осадів стічних вод (за сухою речовиною) становило близько 15 млн. т [1].

Розрахунковий обсяг свіжеутвореного осаду від очисних споруд систем централізованого водовідведення по Україні складає 338 тис. т/рік (при вологості 97 %). Загальний об'єм осадів накопичених на спорудах очищення стічних вод в Україні наразі невідомий, але за приблизною експертною оцінкою він може становити від 50 до 80 млн. м³ [2].

Швидко зростаюча глобальна кількість мулових стічних вод, що утворюються щорічно, залежить від урбанізації, ступеня розвитку та способу життя.

Основними методами обробки осадів стічних вод є ущільнення [3], стабілізація [4], кондиціонування [5], зневоднення [6], термічне сушіння [7] та спалювання [8].

Осади стічних вод в необробленому вигляді нагромаджують на мулових майданчиках, шламонагромаджувачах, відвалах тощо, де відбувається швидке переповнення через брак територій поблизу міст чи інших населених пунктів. Більше того, осади, що утворюються на каналізаційних очисних спорудах (КОС), містять значну кількість важких металів, патогенів та бактерій [9].

В країнах Євросоюзу заборонено захоронення осаду стічних вод, зокрема у Польщі з 1 січня 2016 року. Слід наголосити, що

законодавчі зміни щодо управління стічними водами, поряд із систематичним збільшенням обсягу утворених осадів стічних вод, тягнуть за собою необхідність зміни існуючого методу управління цими осадами [10].

Високий вміст вологи в муніципальних осадах стічних вод створює величезні труднощі для їх безпечної утилізації та подальшого використання.

Зневоднення осадів стічних вод відіграє вирішальну роль у зменшенні об'єму осаду та, як наслідок, пов'язаних з ним витрат на подальшу обробку, транспортування та утилізацію.

Наразі основним методом, що використовують для зневоднення осадів стічних вод, є механічне зневоднення.

МЕТА І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є порівняння залежностей, які описують кінетику зневоднення осадів стічних вод, з експериментальними даними, отриманими при дослідженні компресійно-фільтраційних властивостей цих осадів.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ПОЯСНЕННЯ

Швидкість, м/с, фільтрування осадів стічних вод [11]

$$q = f(G, e, W, \mu, t, p, h), \quad (1)$$

де G – модуль стиснення осаду, Па; e – коефіцієнт пористості осаду; W – вологість осаду; μ – динамічна в'язкість фільтрату, Па·с; t – тривалість фільтрування, с; p – тиск рідини в порах осаду, Па; h – товщина шару осаду, м.

Вологість осаду W залежить від коефіцієнта пористості осаду e [11]. Перепишемо функціональну залежність (1) у вигляді

$$\phi(q, G, e, \mu, t, p, h) = 0. \quad (2)$$

Проведемо моделювання методом розмірностей. Залежність (2) має $n = 7$ змінних. Для знаходження цієї функціональної залежності використаємо π -теорему. Якщо ці n змінних можуть бути виражені через m основних розмірних одиниць, то їх можна згрупувати в $(n - m)$ безрозмірних комплексів π .

Для механічних процесів, наприклад, $m = 3$ – незалежні величини з розмірностями маси (M , кг), довжини (L , м), часу (T , с). Тоді $n - m = 7 - 3 = 4$. Розмірності $[q] = LT^{-1}$; $[G] = ML^{-1}T^{-2}$; $[e] = -$; $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$; $[t] = T$; $[p] = ML^{-1}T^{-2}$; $[h] = L$.

Розмірності шуканих параметрів відносно незалежних величини наведено в табл. 1.

Табл. 1. Розмірність шуканих параметрів
Table 1. Dimensions of the determined parameters

Параметри Величини	q	G	e	μ	t	p	h
M	0	1	0	1	0	1	0
L	1	-1	0	-1	0	-1	1
T	-1	-2	0	-1	1	-2	0

За основні параметри вибрано q, μ, p . Правильність вибору цих параметрів перевіримо за визначником Δ , що складається з їх розмірностей [12]:

$$\begin{array}{c|ccc|} & q & \mu & p & \\ M & | & & & | \\ L & | & & & | \\ T & | & & & | \end{array} \quad (2)$$

При цьому має бути $\Delta \neq 0$. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad (3)$$

Тому залежність (2) можна замінити такою:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, e) = 0, \quad (4)$$

Тут комплекси

$$\pi_1 = q^{\alpha_1} \cdot \mu^{\beta_1} \cdot p^{\gamma_1} \cdot G;$$

$$\pi_2 = q^{\alpha_2} \cdot \mu^{\beta_2} \cdot p^{\gamma_2} \cdot t;$$

$$\pi_3 = q^{\alpha_3} \cdot \mu^{\beta_3} \cdot p^{\gamma_3} \cdot h.$$

Показники степенів $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ визначають з умови, щоб комплекси π були безрозмірними.

Враховуючи, що розмірності обох частин комплексу π однакові, замінимо всі величини в ньому розмірностями цих величин. Так, для комплексу π_1

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (L \cdot T^{-1})^{\alpha_1} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\beta_1} \times (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})^{\gamma_1} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})$$

Щоб комплекси π були безрозмірними, необхідно щоб сума показників степенів для кожної розмірності дорівнювала нулю. Тому отримано систему з трьох рівнянь з трьома невідомими α , β , γ .

Для комплексу π_1 складемо відповідні рівняння для розмірності маси (M), довжини (L), часу (T):

$$\begin{cases} 0 = \beta_1 + \gamma_1 + 1; \\ 0 = \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - 1; \\ 0 = -\alpha_1 - \beta_1 - 2\gamma_1 - 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $\alpha_1 = 0$; $\beta_1 = 0$; $\gamma_1 = -1$; тоді маємо

$$\pi_1 = q^0 \cdot \mu^0 \cdot p^{-1} \cdot G = \frac{G}{p}$$

Аналогічно для комплексу π_2 :

$$\pi_2 = q^0 \cdot \mu^{-1} \cdot p^1 \cdot t = \frac{p \cdot t}{\mu}$$

Аналогічно для комплексу π_3 :

$$\pi_3 = q^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot p^1 \cdot h = \frac{p \cdot h}{q \cdot \mu}$$

Залежність (4) набуває вигляду:

$$\phi\left(\frac{G}{p}, \frac{p \cdot t}{\mu}, \frac{p \cdot h}{q \cdot \mu}, e\right) = 0. \quad (5)$$

Графіки залежності $G = f_1(p)$ при дослідженні компресійно-фільтраційних властивостей суміші осаду стічних вод (з первинного та вторинного відстійників у співвідношенні 1:2) з Львівських КОС наведено в [13], казеїну-сирцю – в [14]. Для казеїну-сирцю також наведено графік залежності $e = f_2(p)$ [14].

Число подібності $\frac{p \cdot h}{q \cdot \mu}$ можна розглядати як відношення сили тиску $[F_p] = p \cdot L^2$ до сили в'язкості $[F_V] = \mu \cdot V \cdot L$ [15, 45]:

$$\frac{[F_p]}{[F_V]} = \frac{p \cdot L}{\mu \cdot V}, \quad (6)$$

де p – тиск, Па; L – характерна довжина, м; μ – динамічна в'язкість, Па·с; V – швидкість, м/с.

Для всієї пористої маси вважається справедливим основний закон ламінарної

фільтрації Дарсі [16]. По аналогії з цим законом отримано [11]:

$$q = \frac{1}{\mu \cdot r_0} \cdot \frac{p}{h}, \quad (7)$$

де $\frac{1}{\mu \cdot r_0}$ – аналог коефіцієнта ламінарної фільтрації, $\text{м}^2/(\text{Па} \cdot \text{с})$; r_0 – питомий опір фільтрування осаду стічних вод, $1/\text{м}^2$; $\frac{p}{h}$ – аналог гідравлічного похилу, Па/м.

Помноживши ліву та праву частини (7) на $\frac{t}{h}$, отримуємо

$$\frac{q \cdot t}{h} = \frac{p \cdot t}{\mu \cdot r_0 \cdot h^2}. \quad (8)$$

По аналогії з формулою, яка враховує як ламінарну, так і турбулентну фільтрацію, запропоновано залежність [11]:

$$\frac{q \cdot t}{h} = a + b \cdot \left(\frac{p \cdot t}{\mu \cdot r_0 \cdot h^2}\right)^m, \quad (9)$$

де a , b – емпіричні коефіцієнти, a , м/с; b , $(\text{м/с})^{1-m}$; m – показник степеня.

Число подібності $\frac{q \cdot t}{h}$ можна також отримати із залежності (5), поділивши числа подібності $\frac{p \cdot t}{\mu}$ та $\frac{p \cdot h}{q \cdot \mu}$. Число $\frac{q \cdot t}{h}$ є аналогом критерію гомохронності, який має фізичний зміст як характеристика нестационарної течії рідини [17, 405]:

$$Ho = \frac{v \cdot t}{L}, \quad (10)$$

де t – час, с.

При зневодненні суміші осаду стічних вод з Львівських КОС графік залежності $\frac{q \cdot t}{h} = f\left(\frac{p \cdot t}{\mu \cdot r_0 \cdot h^2}\right)$ наведено на рис. 1. У формулі (9) використано такі значення: $a = 0,704$ м/с; $b = 0,963$ $(\text{м/с})^{1-m}$; $m = 0,9375$.

ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

Математичне моделювання кінетики зневоднення осадів стічних вод методом розмірностей дозволило отримати функціональну залежність з чисел подібності. Числа подібності мають фізичний сенс як співвідношення сил або є аналогами критеріїв подібності.

Фізичне моделювання процесу зневоднення суміші осаду стічних вод з Львівських КОС підтвердило справедливості

залежності (5), отриманої методом розмірностей. Аналогію з фільтрацією підтверджують залежності (8) та (9).

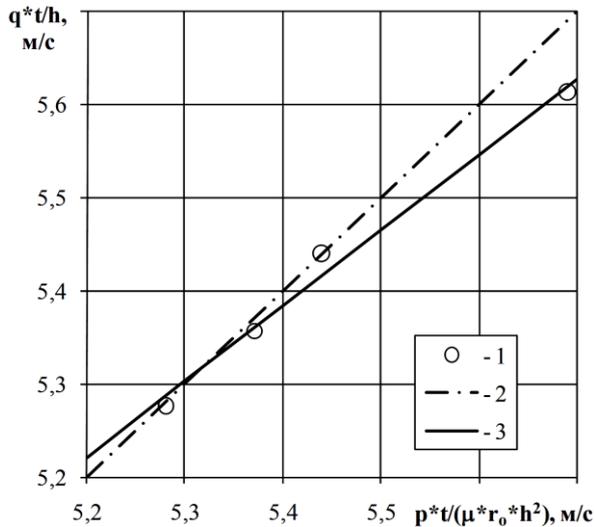


Рис. 1. Аналогія з фільтрацією при зневодненні суміші осаду стічних вод з Львівських КОС: 1 – експериментальні дані; 2 – за формулою (8); 3 – за формулою (9)

Fig. 1. Analogy with filtration during the dewatering of sewage sludge mixture from the Lviv wastewater treatment plants: 1 – experimental data; 2 – calculated according to equation (8); 3 – calculated according to equation (9)

ЛІТЕРАТУРА

1. Eurostat, S.O.E.U. Sewage sludge production and disposal from urban wastewater (in dry substance (d.s)), 2025. [Online]. URL: <https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/ten00030/default/table?lang=en>
2. Національна доповідь про якість питної води та стан питного водопостачання та водовідведення в Україні у 2023 році. Київ: Міністерство розвитку громад та територій України, 2024. 438 с.
3. Romero-Güiza M. S., Flotats X., Asiain-Mira R., Palatsi J. Enhancement of sewage sludge thickening and energy self-sufficiency with advanced process control tools in a full-scale wastewater treatment plant // Water research, 2022, 222, 118924.
4. Cárdenas-Talero J. L., Silva-Leal J. A., Pérez-Vidal A., Torres-Lozada P. The influence of municipal wastewater treatment technologies on the biological stabilization of sewage sludge: a systematic review // Sustainability, 2022, 14 (10), 5910.
5. Wolski P., Zawieja I. Hybrid conditioning before anaerobic digestion for the improvement of

sewage sludge dewatering // Desalination and Water Treatment, 2014, 52(19-21), 3725-3731.

6. Kamizela T., Kowalczyk M. Sludge dewatering: Processes for enhanced performance // Industrial and Municipal Sludge, 2019, 399-423. Butterworth-Heinemann.
7. Deviatkin I., Lyu L., Chen S., Havukainen J., Wang F., Horttanainen M., Mänttari M. Technical implications and global warming potential of recovering nitrogen released during continuous thermal drying of sewage sludge // Waste Management, 2019, 90, 132-140.
8. Liang Y., Xu D., Feng P., Hao B., Guo Y., Wang S. Municipal sewage sludge incineration and its air pollution control // Journal of Cleaner Production, 2021, 295, 126456.
9. Liew C. S., Yunus N. M., Chidi B. S., Lam M. K., Goh P. S., Mohamad M., Sin J. C., Lam S. M., Lim J. W., Lam S. S. A review on recent disposal of hazardous sewage sludge via anaerobic digestion and novel composting // J. Hazard Mater, 2021, 423:126995.
10. Przydatek G., Wota A. K. Analysis of the comprehensive management of sewage sludge in Poland // Journal of Material Cycles and Waste Management, 2019, 1-9.
11. Вербовський О. В., Сибірний А. В., Регуш А. В. Кінетика зневоднення осадів стічних вод // Вісник ЛДУБЖД. 2008. №2. С. 135-139.
12. Дмитрів В. Т., Саган О. Я., Городняк Р. В. Застосування теорії розмірностей в дослідженнях дозаторів сипких матеріалів за багатфакторного експерименту // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. 2023. Вип. 57. С. 13-20.
13. Verbovskiy O., Orel V., Femiak V. Modeling of wastewater sludge dewatering kinetics using the method of linear proportionalities // Energy Engineering and Control Systems, 2025, 11 (1), 1-7.
14. Кравець О. І., Шинкарик М. М., Кравець В. І., Стадницький М. А. Дослідження компресійно-фільтраційних властивостей казеїну-сирцю // Таврійський науковий вісник. Технічні науки. 2024. Вип. 4. С. 227-236.
15. Кепич Т. Ю., Куценко О. Г. Основи теорії подібності та аналізу розмірностей та їх застосування в задачах механіки: Навчальний посібник. Київ: Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2004. 100 с.
16. Шинкарик М., Єресько Г., Формазюк Л., Ворошук В. Дослідження компресійно-фільтраційних характеристик сирів з підплавленням сирної маси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 1997. Т. 2, ч.1. С. 111-114.

17. **Науменко І. І.** Гідравліка. Підручник. Рівне: НУВГП, 2005. 475 с.

REFERENCES

1. **Eurostat (2025).** S.O.E.U. Sewage sludge production and disposal from urban wastewater (in dry substance (d.s)). [Online]. Retrieved from <https://ec.europa.eu/eurostat/data-browser/view/ten00030/default/table?lang=en>
2. **Ministry for Communities and Territories Development of Ukraine (2024).** *National Report on the Quality of Drinking Water and the State of Drinking Water Supply and Wastewater Disposal in Ukraine in 2023.* Retrieved from <https://mindev.gov.ua/storage/app/sites/1/uploaded-files/nacionalna-dopovid-pro-iakest-pitnoyi-vodi-ta-stan-pitnogo-vodopostacannia-ta-vodovidvedennia-v-ukrayini-u-2023-r.pdf> [in Ukrainian]
3. **Romero-Güiza, M. S., Flotats, X., Asiain-Mira, R., & Palatsi, J. (2022).** Enhancement of sewage sludge thickening and energy self-sufficiency with advanced process control tools in a full-scale wastewater treatment plant. *Water Research*, 222, 118924. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2022.118924>
4. **Cárdenas-Talero, J. L., Silva-Leal, J. A., Pérez-Vidal, A., & Torres-Lozada, P. (2022).** The Influence of Municipal Wastewater Treatment Technologies on the Biological Stabilization of Sewage Sludge: A Systematic Review. *Sustainability*, 14(10), 5910. <https://doi.org/10.3390/su14105910>
5. **Wolski, P., & Zawieja, I. (2014).** Hybrid conditioning before anaerobic digestion for the improvement of sewage sludge dewatering. *Desalination and Water Treatment*, 52(19-21), 3725-3731. <https://doi.org/10.1080/19443994.2014.884685>
6. **Kamizela, T., & Kowalczyk, M. (2019).** Sludge dewatering: Processes for enhanced performance. In: *Industrial and Municipal Sludge*, 399–423. Butterworth-Heinemann. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815907-1.00018-0>
7. **Deviatkin, I., Lyu, L., Chen, S., Havukainen, J., Wang, F., Horttanainen, M., & Mänttari, M. (2019).** Technical implications and global warming potential of recovering nitrogen released during continuous thermal drying of sewage sludge. *Waste Management*, 90, 132–140. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2019.04.031>
8. **Liang, Y., Xu, D., Feng, P., Hao, B., Guo, Y., & Wang, S. (2021).** Municipal sewage sludge incineration and its air pollution control. *Journal of Cleaner Production*, 295, 126456. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.126456>
9. **Liew, C. S., Yunus, N. M., Chidi, B. S., Lam, M. K., Goh, P. S., Mohamad, M., Sin, J. C., Lam, S. M., Lim, J. W., & Lam, S. S. (2022).** A review on recent disposal of hazardous sewage sludge via anaerobic digestion and novel composting. *J Hazard Mater*, 423:126995. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2021.126995>
10. **Przydatek, G., & Wota, A. K. (2019).** Analysis of the comprehensive management of sewage sludge in Poland. *Journal of Material Cycles and Waste Management*, 22(1), 80–88. <https://doi.org/10.1007/s10163-019-00937-y>
11. **Verbovskyi, O. V., Sibirny, A. V., & Regush, A. Ya (2008).** Kinetics of sewage sludge dehydration. *Bulletin of the Lviv State University of Life Safety*, 2. 135–139. [in Ukrainian].
12. **Dmytriv, V., Sahan, O., & Gorodnyak, R. (2023).** Application of the theory of dimensions in research of floor materials dispensers in multifactor experiment. *Avtomatizaciâ Virobničih Procesiv u Mašinobuduvanni Ta Priladobuduvanni*, 57, 13–20. <https://doi.org/10.23939/istcipa2023.57.013>
13. **Verbovskyi, O., Orel, V., & Femiak, V. (2025).** Modeling of wastewater sludge dewatering kinetics using the method of linear proportionalities. *Energy Engineering and Control Systems*, 11 (1), 1–7. <https://doi.org/10.23939/jeecs2025.01.001>
14. **Kravets, O. I., Shynkaryk, M. M., Kravets, V. I., & Stadnytskyi, M. A. (2024).** Research of compression and filtration properties of raw casein. *Taurida Scientific Herald. Series: Technical Sciences*, 4. 227–236. <https://doi.org/10.32782/tnv-tech.2024.4.23>
15. **Kepych, T. Yu., & Kutsenko, O. G. (2004).** *Fundamentals of similarity theory and dimensional analysis and their application in problems of mechanics: Textbook.* Kyiv, Taras Shevchenko National University. [in Ukrainian].
16. **Shynkaryk, M., Yeresko, H., Formaziuk, L., & Voroshchuk, V. (1997).** Doslidzhennia kompresiiino-filtratsiinykh kharakterystyk syriv z pidplavleniam syrnoi masy. *Scientific journal of the Ternopil State Technical University*, 2 (1). 111–114. [in Ukrainian].
17. **Naumenko, I. I. (2005).** *Hydraulics.* Textbook. Kyiv, National University of Water and Environmental Engineering. [in Ukrainian].

Modelling the kinetics of sewage sludge dewatering using the dimensional analysis method

Orest Verbovskiy, Maksym Havrysh, Vadym Orel

Abstract. With the growth of the population, the development of industrial construction, and the acceleration of urbanization, the generation of wastewater increases annually. Accordingly, the amount of sewage sludge is also rising, including sewage sludge containing significant concentrations of heavy metals, pathogens, and bacteria. The high moisture content of municipal sewage sludge creates serious challenges for its safe disposal and further utilization. In the countries of the European Union, landfilling of sewage sludge is prohibited. Therefore, sewage sludge is no longer accumulated in sewage sludge drying beds, sewage sludge storage lagoons, or dumps, as is still practiced in our country. Consequently, there is a need to revise the existing sewage sludge management approach. Mathematical modeling of the kinetics of sewage sludge dewatering using the dimensional analysis method made it possible to obtain a functional relationship expressed in terms of dimensionless similarity numbers. These similarity numbers have a clear physical meaning as ratios of forces or as analogues of classical similarity criteria. The analogy with filtration theory was confirmed in the study of the compression–filtration properties of sewage sludge mixture from the Lviv municipal wastewater treatment plants.

Key words: dewater ability, sewage sludge, water content, dimensional analysis method, similarity numbers.

Дата першого надходження рукопису 05.03.2026

Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування 17.03.2026

Дата публікації 31.03.2026