

## ВИЗНАЧЕННЯ НОРМАЛЬНОЇ ГЛИБИНИ ПОТОКУ В СИСТЕМІ CAS MAXIMA

Юрій Копаниця<sup>1</sup>, Олена Гіжа<sup>2</sup>, Оксана Нечипор<sup>3</sup>, Нестан Таварткіладзе<sup>4</sup>

Київський національний університет будівництва і архітектури,  
31, Повітрофлотський проспект, Київ, 03037, Україна

<sup>1</sup>канд. тех. наук., доцент, kopanytsia.iud@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0002-9470-1902

<sup>2</sup>канд. тех. наук., доцент, gizha.oo@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0003-4878-6850

<sup>3</sup>канд. тех. наук., доцент, nechypor.om@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0001-8635-2231  
tavartkiladze\_ni@knuba.edu.ua, orcid.org/0000-0002-6712-9576

DOI: 10.32347/2524-0021.2021.35.21-30

**Анотація.** Питання про визначення нормальної глибини, тобто глибини рівномірного руху, входить практично в усі розрахунки відкритих русел і гідротехнічних споруд (водозливів, перепадів, швидкотоків тощо). Цю глибину також треба знати і при аналізі форм кривих вільної поверхні та розрахунках їхньої довжини.

Важливу роль відіграє нормальна глибина і при дослідженні форм спряження б'єфів. Від неї залежить розташування гідравлічного стрибка і як наслідок визначається необхідність улаштування гасителів енергії потоку після споруд або розглядається безстрибкове спряження б'єфів.

Розвиток персональних мобільних мікропроцесорних гаджетів, систем комп'ютерної математики та інтерактивних онлайн додатків дозволяють використовувати в навчальному процесі системи комп'ютерної математики: символну математику, чисельні методи та потужній функціонал графічної підсистеми. Стаття показує чотири варіанти інженерного розрахунку стандартної задачі визначення нормальної глибини в руслі трапецеїдального живого перерізу.

Розглянуто переваги й недоліки символних та чисельних алгоритмів розрахунку задачі у системі CAS MAXIMA. Представлена візуалізація й спосіб простого ітераційного розв'язання задачі. Проведено оцінку точності результату отриманого графічним методом. Паралельно рішення задачі отримано у Веб-інтерфейсі он-лайн сервісу системи CAS MAXIMA на сервері CESGA.

У статті представлено чотири варіанти й три різних алгоритми вирішення однієї задачі. Не існує єдиного вірного універсального методу. Ми маємо аналізувати й поєднувати на різних етапах вирішення найбільш раціональні підходи й алгоритми.

Результати розрахунків представленої задачі демонструють природне послідовне використання символної форми представлення системи рівнянь із чисельним розрахунком та/або візуалізацією результатів.

**Ключові слова:** рівномірний рух; нормальна глибина; CAS MAXIMA.

### ВСТУП

Питання про визначення нормальної глибини, тобто глибини рівномірного руху, входить практично в усі розрахунки відкритих русел і гідротехнічних споруд (водозливів, перепадів, швидкотоків і т.п.). Цю глибину також треба знати і

при аналізі форм кривих вільної поверхні та розрахунках їхньої довжини.

Важливу роль відіграє нормальна глибина і при дослідженні форм спряження б'єфів. Від неї залежить розташування гідравлічного стрибка і як наслідок визначається необхідність улаштування гасителів енергії потоку після спо-

руд або розглядається безстрибкове спряження б'єфів.

В літературі наводиться декілька методів розрахунку нормальної глибини для різних форм русел [1, 2, 3, 5].

Можна визначати глибину рівномірного руху методом підбору або побудовою графіка залежності  $Q = f(h)$  за кількома довільними точками.

Задача даної роботи полягає в тому, щоб представити порівняльні розрахунки нормальної глибини за одним із відомих методів та показати сучасний підхід

до вирішення цієї ж задачі, застосовуючи системи комп'ютерної алгебри МАХ-ІМА.

Розглянемо визначення нормальної глибини в руслі трапецеїдального живого перерізу (рис. 1) з коефіцієнтом закладання укосів  $m = 1,5$ , ширині русла по дну  $b = 2$  м, коефіцієнті шорсткості  $n = 0,02$ , похилі русла  $i = 0,003$ , розрахунковій витраті  $Q = 5 \text{ м}^3/\text{с}$ .

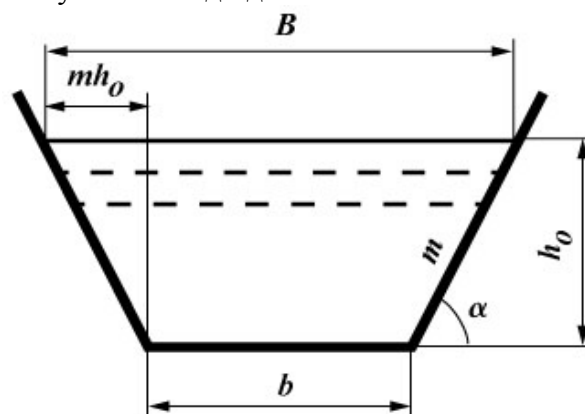


Рис.1. Визначення нормальної глибини в руслі трапецеїдального живого перерізу  
Fig. 1. Determination of normal depth in the channel of a trapezoidal living section

При рівномірному русі витрата потоку визначається за рівнянням

$$Q = W \omega \sqrt{i} = K \sqrt{i},$$

де  $\omega$  – площа живого перерізу;  $i$  – похил дна русла;  $W$  – швидкісна характеристика.

В це рівняння нормальна глибина входить у неявному вигляді. Призначаючи довільні глибини  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , обчислюємо відповідні площі, змочені периметри, гідравлічні радіуси, швидкісні характеристики і знаходимо витрати. Знайдені значення витрати порівнюємо із заданою витратою.

Коли  $Q_n = Q$ , то  $h_n = h_0$ .

Для зазначених величин трапецеїдального русла покажемо основні формули.

1. Площа живого перерізу:

$$\omega = bh + mh^2.$$

2. Змочений периметр:

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}.$$

3. Ширина русла по верху:

$$B = b + 2mh.$$

4. Гідравлічний радіус:  $R = \frac{\omega}{\chi}$ .

5. Швидкісна характеристика:

$$W = C \sqrt{R},$$

де  $C$  – коефіцієнт Шезі  $C = \frac{1}{n} R^z$ ,

де за формулою М. М. Павловського  $z = 0,37 + 2,5\sqrt{n} - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R}$ .

6. Витрата:  $Q = W \omega \sqrt{i} = K \sqrt{i}$ ,

де  $K$  – витратна характеристика:

$$K = W \omega.$$

Розрахунки проводяться доти, доки шукана витрата не буде дорівнювати витраті, що задана за умовою задачі.

За даними розрахунків також можна побудувати графік залежності  $Q = f(h)$ .

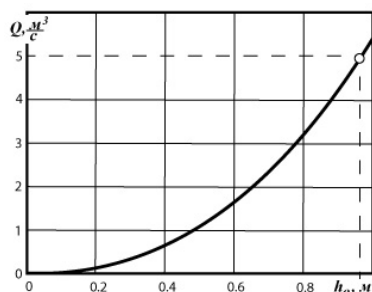
Всі розрахунки зводимо у таблицю 1.

**Табл. 1.** Розрахунок нормальної глибини  
**Table. 1.** Calculation of normal depth

Глибина $h$ , м	Площа живого перерізу $\omega$ , м <sup>2</sup>	Змочений периметр, $\chi$ , м	Гідравлічний радіус, $R$ , м	Параметр $z$	Коефіцієнт Шезі $C$	Швидкісна характеристика, $W$ , м/с	Витрата, $Q$ , м <sup>3</sup> /с
0,2	0,46	2,72	0,169	0,71	14,13	5,81	0,146
0,5	1,375	3,803	0,362	0,7049	24,429	14,698	1,107
0,7	2,135	4,524	0,472	0,7023	29,510	20,276	2,371
0,8	2,56	4,885	0,524	0,7011	31,782	23,007	3,226
1,0	3,50	5,606	0,624	0,7000	35,940	28,392	5,442
<b>0,965</b>	<b>3,327</b>	<b>5,479</b>	<b>0,6072</b>	<b>0,6994</b>	<b>35,27</b>	<b>27,483</b>	<b>5,008</b>

При глибині  $h = 0,965$  м витрата дорівнює заданій за умовою задачі, тобто  $Q \cong 5 \text{ м}^3/\text{с}$ . Значить нормальна глибина визначена правильно.

Підбір глибин можна спростити, якщо побудувати графік залежності  $Q = f(h)$  (рис. 2).



**Рис. 2.** Графік залежності  $Q = f(h)$

**Fig. 2.** Dependence graph  $Q = f(h)$

## МЕТА І МЕТОДИ

Розвиток сучасної мікропроцесорної техніки й поширення можливостей мобільних персональних розрахунків із застосуванням систем комп'ютерної математики дозволяє реалізовувати в інженерній практиці розрахунки будь-якої складності. На початку ХХ-го століття говорили про важливість формування математичної думки студентів [7–9].

Ми пройшли шлях від логарифмічної лінійки із точністю розрахунків 0.01 на

початку минулого століття до роботи із діапазоном +/-5E-324 для чисел із плаваючою крапкою й 32-х розрядним зберіганням у пам'яті комп'ютера. Приклад розрядності наведено для мови JavaScript за стандартом IEEE754 – одна із сучасних стандартних мов програмування інтерактивних Веб-інтерфейсів мережі Інтернет.

Сучасні критерії та вимоги до формування системної цілісної математичної думки студентів суттєво підвищено. Використання математичного апарату й методів, які реалізовано в системах комп'ютерної алгебри, дозволяють вирішувати інженерні задачі: аналітичними методами; за чисельними алгоритмами; безпосередньо представляти необхідні залежності графічно, без необхідності складних аналітичних перетворень.

## РЕЗУЛЬТАТИ ТА ПОЯСНЕННЯ

### Варіант №1

#### Методи символічної математики.

Представлено варіанти вирішення вищезначеної задачі визначення нормальної глибини за наведеними аналітичними формулами. Для прикладу використано відкритий програмний продукт CAS MAXIMA, який розповсюджується по ліцензії GPL й має порти для всіх основних операційних систем (рис. 3) [10-11]. У системі CAS MAXIMA реалізовано методи символічної математики.

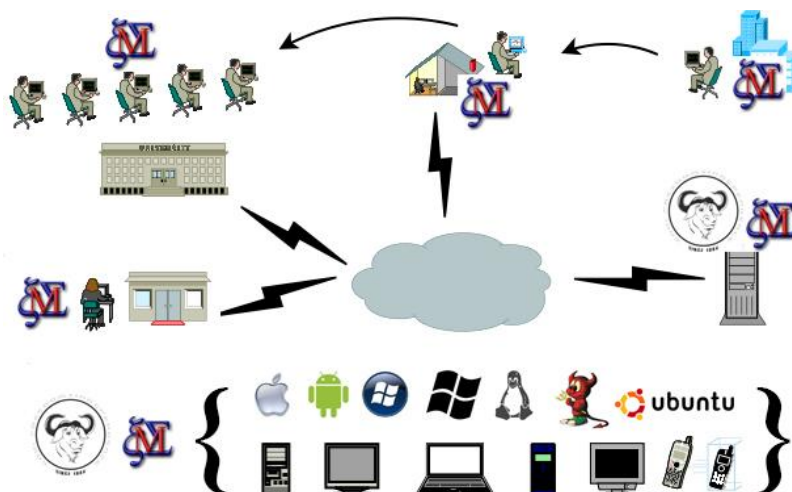


Рис. 3. Відкритий програмний продукт CAS MAXIMA  
 Fig. 3. Open software product CAS MAXIMA

Приклад елементів програмного коду розрахунку у скріншоті (рис. 4).

Загальна аналітична залежність системи вищезначених рівнянь у пакеті символічної математики CAS MAXIMA (рис. 4 a, b) отримано автоматично (рис. 4 c). Результат роботи блоку символічної математики в системі комп'ютерної алгебри представлено на рисунку 3b. Запис у звичайній математичній нотації отримано командами експорту коду формули у формат TEX (рис. 4 c).

**Висновок.** Вирішення загального рівняння в символічному вигляді (рис. 3 c) не раціонально. Доцільно скористатися чисельними методами.

#### Варіант №2

**Чисельні методи.** Всі необхідні залежності у символічному форматі запису нами отримано на попередньому етапі (рис. 4a). Ми автоматично маємо узагальнене рівняння залежності глибини потоку й відповідних витрат у символічній нотації (рис. 4c). Доцільно скористатись чисельними методами. Перевірка розрахунків для трьох послідовних ітерацій представлено у скріншоті екрану програми на рисунку (рис. 4b).

На скріншоті (рис. 4d) результат повного циклу ітераційних розрахунків.

Представлено метод «ізоляції кореня». Використовуємо звичайний цикл для чисельного розрахунку й на п'ятій ітерації наближено отримуємо попередній результат. Проміжні результати розрахунків на кожній ітерації зберігаємо у масиві векторного формату. Аналіз отриманих значень маємо можливість представити у зручній для нас формі. Наприклад, команда під номером (%i20) (рис. 4d) ілюструє доступ до четвертого елемента вектору із отриманими результатами. Четвертий та п'ятий елемент вектору зберігають шукані границі інтервалу.

**Висновок.** На четвертій та п'ятій ітераціях (рис. 4d) отримано наближене значення діапазону глибин до якого належить нормальна глибина. Подальше вирішення задачі із заданою точністю можливо за алгоритмами чисельних методів – методом дихотомії, методу хорд тощо. Реалізація означених методів вимагає сумісного використання команд визначення умов й циклів.

У звичайній інженерній практиці ми можемо суттєво спростити алгоритм визначення нормальної глибини потоку й не використовувати елементи програмування в системі CAS MAXIMA.

**a**

```

kill (all);
done
b:=2$ i:0.003$ m:1.5$ Q:5$ n:0.02$
fw(h):=b+h*m*h^2$
fKsi(h):=b+2*h*sqrt(1+m^2)$
FB(h):=b+2*m*h$
FR(h):=fw(h)/fKsi(h)$
fz(h):=0.37+2.5*sqrt(n)-0.75*(sqrt(n)-0.1)*sqrt(fR(h))$
FC(h):=(1/n)*fR(h)^(fz(h))$
FW(h):=FC(h)*sqrt(fR(h))$
FQ(h):=FW(h)*fw(h)*sqrt(i)$
    
```

**b**

```

fQ(0.2); fQ(0.4); fQ(0.6); fQ(0.8);
0.1464131637908516
0.672094751646355
1.667612617325986
3.22687748476892
    
```

**c**

$$5 = 2.738612787525831 (1.5h^2 + 2h) \left( \frac{1.5h^2 + 2h}{3.605551275463989h + 2} \right)^{1.223553390593274 - 0.03106601717798212 \sqrt{\frac{1.5h^2 + 2h}{3.605551275463989h + 2}}}$$

**d**

```

for h:0.2 thru 1 step 0.2 do display(p[j])
p1=0.1464131637908516
j=2
h=0.2
p2=0.672094751646355
j=3
h=0.4
p3=1.667612617325986
j=4
h=0.6000000000000001
p4=3.22687748476892
j=5
h=0.8
p5=5.449312523083323
j=6
h=1.0
p[4];
1.105408638753956
    
```

**e**

```

plot2d([fQ(x),y(x)],x,0,2);
plot2d([fQ(x),y(x)],x,0.964,0.9645);
test:fQ(0.9643);
(test) 4.999431259042536
(test-Q)/Q;
-1.137481914927463 10^-4
    
```

**f**

**g**

Рис. 4. Розрахунок у системі CAS MAXIMA

**a** – програмний код; **b** – символічні розрахунки; **c** – інтегральна залежність; **d** – чисельні розрахунки; **e** – графічні команди й оцінка точності; **f** – ізоляція кореня; **g** – результат

Fig. 4. Calculation in the CAS MAXIMA system

**a** – program code, **b** – symbolic calculations; **c** – integral dependence; **d** – numerical calculations, **e** – graphical commands and accuracy estimation, **f** – root isolation, **g** – result

### Варіант №3

**Графічні методи.** Візуалізація та наочне графічне представлення результатів наближеного рішення поставленої задачі отримано за допомогою однієї стандартної команди двомірної графіки (рис. 4 f). Використовуємо результати апарату символічної математики (рис. 4 a) й отримуємо загальну функціональну залежність (рис. 4 c) глибини й витрат потоку у каналі. Скріншот роботи програмного коду реалізації методу «ізоляції кореня» у графічному форматі представлено на рис. 4 f. Нормальна глибина за даними умовами задачі лежить в межах одного метра. Для наочності ми обрали великий діапазон зміни аргументу – глибини потоку – й за допомогою однієї графічної команди отримали наближений результат.

Межі відображення графіка легко змінити й отримати більш детальну картину (рис. 4 g) із будь-якою, наперед заданою точністю.

**Аналіз точності.** Точність розрахунків повинна бути у межах похибки виміру вихідних даних. У технічних розрахунках загальноприйнята похибка виміру 3-5%. Оцінка відносного відхилення отриманого результату при глибині  $h = 0,9643$  м дає порядок 0,01%. Скріншот програми із результатом розрахунку оцінки відносної точності представлено на рисунку – команда із номером “%o23” (рис. 4 e).

Використовуючи одну графічну команду у дві-три ітерації (рис. 4 f, g) ми маємо всі необхідні величини для оцінки абсолютної та відносної похибки результату розрахунку.

**Висновок.** Об'єднання методів символічної математики й графіки дозволяє уникнути складних математичних методів вирішення системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Маємо механізм отримання результату шляхом використання простої графічної команди й візуального

наочного досягнення будь-якої необхідної оцінки відносної точності результату (рис. 4 e).

### Варіант №4

**Веб-інтерфейс.** Інтернет дозволяє робити персональні публікації результатів досліджень, без обмежень державними кордонами та регламентуючими правилами, створювати цільові наукові соціальні мережі, ставити задачі й приєднуватись до колективного розуму у пошуку рушень [12, 13].

Веб-інтерфейс й мобільні технології дозволяють мати необмежений миттєвий доступ до обчислювальних можливостей потужних інтернет серверів із будь-якого гаджету. На скріншоті екрану (рис. 5 a, c) представлено код програми у веб-інтерфейсі он-лайн сервісу CESSGA, який використано у розрахунках прикладу нашої тестової задачі на серверах у Іспанії.

Результати ітераційного розрахунку задачі за чисельним алгоритмом в режимі он-лайн представлено на рисунку (рис. 5 a, c). На скріншоті екрану веб-інтерфейс серверу CESSGA із результатами розрахунку нашої задачі. Нажаль, обмеження даного сервісу на серверах CESSGA – виключена можливість виводу графіків.

Для порівняння на рисунку 5 елемент програмного коду розрахунку нормальної глибини потоку рідини у трапецеїдальному руслі на локальному комп'ютері (рис. 5 b) й скріншот опублікованого коду у відкритому доступі й без будь-яких обмежень на персональному сайті автора за посиланням

[http://knuca.k123.com.ua/articles/jg\\_Articles\\_2021\\_v3.html](http://knuca.k123.com.ua/articles/jg_Articles_2021_v3.html)

© 2021 р. Копаниця Ю.Д. (рис. 5 d). Символьна система CAS MAXIMA дозволяє експортувати код програми у загально поширений формат наукових публікацій TEX або формат мережі Інтернет – html, css, MathML.

The image shows a screenshot of the CESGA online calculator interface. The browser address bar shows 'maxima.cesga.es/index.php?c=1141ulG2jvrtppgvglo8n=3'. The page title is 'Maxima on line' and it includes a logo for 'Servicio proporcionado por CESGA'. There are buttons for 'Clic' and 'Clear', and a 'Help' link for 'Español, English Galego'. The main area contains Maxima code for defining variables and calculating a function. Below the code, there are three panels labeled 'a', 'b', and 'c' showing the results of the calculations. Panel 'a' shows the code. Panel 'b' shows the result of the function evaluation at h=1.5, resulting in a value of 5. Panel 'c' shows the results of a loop for h from 0.2 to 1.0 with a step of 0.2, displaying values for p from 1 to 5. A fourth panel 'd' shows a zoomed-in view of the code for a loop with h from 0.96 to 0.97 and the resulting value of p7 = 5.00802.

**a**

```

b:2$ i:0.003$ m:1.5$ Q:5$ n:0.02$
fw(h):=b+h+m*h^2$
fKsi(h):=b+2*h*sqrt(1+m^2)$
fB(h):=b+2*m*h$
fR(h):=fw(h)/fKsi(h)$
fz(h):=0.37+2.5*sqrt(n)-0.75*(sqrt(n)-0.1)*sqrt(fR(h))$
fC(h):=(1/n)*fR(h)^(fz(h))$
fW(h):=fC(h)*sqrt(fR(h))$
fQ(h):=fw(h)+fw(h)*sqrt(i)$
j:1$for h:0.2 thru 1 step 0.2 do (display(p[j]:fQ(h)),s[j]:h,j:j+1)$
    
```

**b**

$$5 = 2.738612787525831 (1.5 h^2 + 2 h)$$

$$\left( \frac{1.5 h^2 + 2 h}{3.605551275463989 h + 2} \right)^{1.223553390593274 - 0.03106601717798212 \sqrt{\frac{1.5 h^2 + 2 h}{3.605551275463989 h + 2}}}$$

**c**

```

(%i14) j:1$

(%i15) for h:0.2 thru 1 step 0.2 do (display(p[j]:fQ(h)),s[j]:h,j:j+1)$

p
1 = 0.14641316379085
p
2 = 0.67209475164636
p
3 = 1.667612617325986
p
4 = 3.22687748476892
p
5 = 5.449312523083323
    
```

**d**

```

(%o17) 3.22687748476892

(%i18) for h:0.96 thru 0.97 step 0.005 do
display(p[j]:fQ(h),j:j+1,h)$

p6 = 4.946862720469042 j = 7 h = 0.96 p7 = 5.00802

(%i19) (5.00802160330477 - 5) / 5
    
```

Рис. 5. Код задачі у режимі он-лайн на сервері CESGA  
 Fig. 5. Code the task online on the CESGA server

## ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

Кожна інженерна задача може мати декілька різних варіантів вирішення за методами із різних розділів єдиної Математики. Не існує задачі окремо виключно для: Дискретної математики, Аналітичної геометрії, Вищої математики, Чисельних методів тощо. Єдиний інтегральний підхід із використанням всіх розділів Математики дозволяє говорити про сучасну математичну культуру інженера.

У статті представлено чотири варіанти й три різних алгоритми вирішення однієї задачі. Не існує єдиного вірного універсального методу. Ми маємо аналізувати й поєднувати на різних етапах вирішення найбільш раціональні підходи й алгоритми.

Результати розрахунків представленої задачі демонструють природне послідовне використання символічної форми представлення системи рівнянь із чисельним розрахунком та/або візуалізацією результатів.

Поєднання сучасних алгоритмів, математичних методів, досягнень мікропроцесорів, програмних систем комп'ютерної математики дозволяє проводити широкий спектр інженерних розрахунків та досліджень.

## ЛІТЕРАТУРА

1. **Константінов Ю. М., Гіжа О. О.** Інженерна гідравліка. К.: Видавничий дім „Слово”, 2006. 432 с.
2. **Константінов Ю. М., Гіжа О. О., Копаниця Ю. Д.** Технічна механіка рідини і газу. Кінематика і динаміка рідини. Приклади і задачі: навчальний посібник. К: КНУБА, 2015. 154 с.
3. **Чоу В. Т.** Гидравлика открытых каналов / Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1969. 462 с.
4. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика. Специальный курс. 4-е изд. М., Л.: Госэнергоиздат, 1962. 678 с.
5. **Константінов Ю. М., Гіжа О. О.** Гідродинамічні характеристики підпертого гідравлічного стрибка. // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки, 2009, № 12.
6. **Graf W. H., Altinakar M. S.** A review of “Hydraulique Fluviale Ecoulement permanent uniforme et non uniforme” *Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes // European Journal of Engineering Education*, 1993, 19(3). P. 378-379.
7. **Viollet P.-L., Chabard J.-P., Esposito P., Laurence D.** *Mécanique des fluides appliquée.* Ponts chaussees, 2003. 384 p. ISBN-13: 978-2859783723
8. **Kobylnyk T., Kohut U. P., Vynnytska N.** CAS MAXIMA as a tool for forming research skills in the process of pre-service informatics teachers training. *Information Technologies and Learning Tools*, 2020, 80(6), 58-74. [doi :10.33407/itlt.v80i6.3801](https://doi.org/10.33407/itlt.v80i6.3801)
9. **Díaz A., García A., de la Villa A.** An example of learning based on competences: Use of Maxima in Linear Algebra for Engineers. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 2011, V.18(4). P. 177-181. ISSN: 1744-2710.
10. **Karjanto N., Husain H. S.** Adopting Maxima as an Open-Source Computer Algebra System into Mathematics Teaching and Learning. In: Kaiser G. (eds) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs.* Springer, 2017, P. 733-734. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3\\_128](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_128)
11. **Maxima** – GPL CAS based on DOE-MACSYMA. Computer Algebra System written in Common Lisp. URL: <https://sourceforge.net/projects/maxima/>
12. **Maxima** Documentation URL: <https://maxima.sourceforge.io/documentation.html>
13. **García A., García F., Rodríguez G., de la Villa, A.** Learning and Assessing Competencies: New challenges for Mathematics in Engineering Degrees in Spain. *Proceedings of 16th Seminar of Mathematics working group de SEFI*, June 2012. ISBN: 978-84-695-3960-6.
14. **Artigue, M.** The future of teaching and learning mathematics with digital technologies. In Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Eds.) *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study.* New York, NY: Springer, 2010. P. 463–475.



## REFERENCES

1. **Konstantinov, Yu. M., & Gizha, O. O. (2006).** *Inzhenerna hidravlika: Pidruchnyk*. Kyiv: Vydavnychi dim „Slovo”. [in Ukrainian]
2. **Konstantinov Yu. M., Gizha O. O. & Kopanytsia Yu. D. (2015).** *Tekhnichna mekhanika ridyny i hazu. Kinematyka i dynamika ridyny. Pryklady i zadachi: navchalnyi posibnyk*. Kyiv: KNUBA. [in Ukrainian]
3. **Chow V. T. (1969).** *Hydraulic of open channels*. Moskwa: Sroyzdat. [in Russian]
4. **Chertousov M. D. (1962).** *Hydraulics. Special course*. Moskwa: Gosenergoizdat. [in Russian]
5. **Konstantinov, Yu. M., & Gizha, O. O. (2009).** Hidrodynamichni kharakterystyky pidpertohto hidravlichnoho strybka. *Problemy vodopostachannia, vodovidvedennia ta hidravliki*, 12. 105-112. [in Ukrainian]
6. **Graf, W. H., & Altınakar, M. S. (1993).** A review of “Hydraulique Fluviale Ecoulement permanent uniforme et non uniforme” *Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, European Journal of Engineering Education*, 19(3). 378-379. doi: [10.1080/03043799408928322](https://doi.org/10.1080/03043799408928322)
7. **Viollet P.-L., Chabard J.-P., Esposito P., & Laurence D. (2003).** *Mécanique des fluides appliquée*. Ponts chaussees. ISBN-13: 978-2859783723
8. **Kobylnyk T., Kohut U. P., & Vynnytska N. (2020).** CAS MAXIMA as a tool for forming research skills in the process of pre-service informatics teachers training. *Information Technologies and Learning Tools*, 80(6), 58-74. doi :[10.33407/itlt.v80i6.3801](https://doi.org/10.33407/itlt.v80i6.3801)
9. **Díaz, A., García, A., & de la Villa, A. (2011).** An example of learning based on competences: Use of Maxima in Linear Algebra for Engineers. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 18(4). 177-181. ISSN: 1744-2710.
10. **Karjanto, N., & Husain, H. S. (2017).** Adopting Maxima as an Open-Source Computer Algebra System into Mathematics Teaching and Learning. In: Kaiser G. (eds) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. ICME-13 Monographs. Springer, 733-734. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3\\_128](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_128)
11. **Sourceforge (2017).** Maxima – GPL CAS based on DOE-MACSYMA. Computer Algebra System written in Common Lisp. Retried from <https://sourceforge.net/projects/maxima/>
12. **Sourceforge (2017).** Maxima Documentation. Retried from <https://maxima.sourceforge.io/documentation.html> Maxima Documentation
13. **García, A., García, F., Rodríguez, G., & de la Villa, A. (2012).** Learning and Assessing Competencies: New challenges for Mathematics in Engineering Degrees in Spain. *Proceedings of 16th Seminar of Mathematics working group de SEFI*. ISBN: 978-84-695-3960-6. Electronic version. Salamanca (Spain). June 2012.
15. **Artigue, M. (2010).** The future of teaching and learning mathematics withdigital technologies. In Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Eds.) *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study*. New York, NY: Springer. 463–475.

### **Determination of normal flow depth in cas maxima system**

*Yuri Kopanytsia, Olena Gizha, Oksana Nechypor, Nestan Tavartkiladze*

**Abstract.** The development of personal mobile microprocessor gadgets, computer mathematics systems and interactive online supplements allow victoriousness in the initial process by algorithms of symbolic mathematics, numerical methods and hard functional graphical. The article shows a choice of options for engineering development of a standard task of assigning a normal depth in line with a trapezoidal living process.

Discernible shortcomings of symbolic and numerical algorithms in the development of tasks in the CAS MAXIMA system. The article presents a visualization and method of a simple iterative solution of tasks. An assessment of the accuracy of the result was carried out using the graphical method. In parallel, the solution of the tasks is taken from the Web-interface to the on-line service of the CAS MAXIMA system on the CESGA server.

**Key words:** uniform flow; normal depth; CAS MAXIMA.

*Стаття надійшла до редакції 17.05.2021*