

ДО РОЗВИТКУ ГІДРАВЛІЧНИХ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ТУРБУЛЕНТНИХ ПОТОКІВ У ТРУБОПРОВОДАХ

Олександр Ткачук¹, Ольга Шевчук²

Національний університет водного господарства та природокористування
11, Соборна вул., м. Рівне, Україна, 33028

¹докт. техн. наук, o.a.tkachuk@nuwm.edu.ua, orcid.org/0000-0002-3036-0010

²канд. техн. наук, o.v.shevchuk@nuwm.edu.ua, orcid.org/0000-0002-7403-8314

DOI: 10.32347/2524-0021.2023.42.71-83

Анотація. Наведено результати теоретичного аналізу турбулентного руху води у трубопроводах. Запропоновано проводити оцінку параметрів турбулентних потоків за показниками молекулярної та турбулентної в'язкості із введенням у розрахунки умовної відносної товщини примежового шару. Уточнено залежності логарифмічного закону розподілу осереднених швидкостей у поперечних перетинах трубопроводів. На відміну від аналогічних формул напівемпіричної теорії турбулентного руху вони відповідають крайовим умовам на стінці трубопроводу. Отримано нові теоретичні залежності між основними параметрами турбулентних потоків у трубопроводах. Доведено, що величина коефіцієнтів гідравлічного тертя визначається двома параметрами: умовною відсною товщиною примежового шару та коефіцієнтом пропорційності, що враховує зміну дотичних напружень у турбулентному потоці. Адекватність отриманих залежностей підтверджена їхньою відповідністю експериментальним даним гідравлічних закономірностей турбулентних потоків, на основі яких було розроблено чинні нормативи для гідравлічних розрахунків водопровідних труб. Для гідравлічно гладких труб отримано залежність явного виду для коефіцієнтів гідравлічного тертя у широкому діапазоні чисел Рейнольдса (від $7 \cdot 10^3$ до 10^7). Вона практично повністю відповідає відомій формулі Прандтля-Кольбрука, що має неявну форму. Визначено числові значення та аналітичні залежності між параметрами турбулентного руху у гідравлічно гладких трубопроводах. Встановлено, що із зростанням числа Рейнольдса величини як умовної, так і абсолютної товщин примежового шару зменшуються, а із збільшенням діаметрів труб – зростають. Показано, що товщина примежового шару залежить від виду і величини шорсткості внутрішньої поверхні труб і є визначальною при оцінці інших параметрів турбулентних потоків у трубопроводах.

Ключові слова: гідравлічні розрахунки, трубопроводи, турбулентні потоки.

ВСТУП

На даний час теорія і практика гідравлічних розрахунків трубопроводів базується на постулатах напівемпіричної теорії турбулентності [1 - 4, 8], в основу якої покладено теорію перенесення кількості руху. Вона є відносно простою та наглядною і започаткована у 20-х роках ХХ століття Л. Прандтлем, розвинута Л. Карманом та експериментально підтверджена І. Нікурдзе. Отримана Л. Прандтлем логарифмі-

чна залежність розподілу осереднених швидкостей для різних точок потоку у перетинах труб достатньо точно узгоджується із експериментальними даними. Однак, вона не відповідає крайовим умовам. Для крайніх точок епюри швидкостей теоретичні дані протирічать реальним: у центрі труби епюра має точку перелому ($du/dr \neq 0$), а на внутрішній поверхні стінки трубопроводу – функція прямує до мінус нескінченності.

Напівемпірична теорія турбулентного руху у трубопроводах отримала подальший

розвиток у наукових працях багатьох провідних вчених (Ф. Кольбрук, Д. Тейлор, А.М. Колмогоров, Г.К. Філоненко, Ф.А. Шевельов, М.Д. Мілліонщиков, А.Д. Альтшуль, М.Ф. Федоров, Ю.М. Константинов, Л.Г. Лойцянский, М.М. Хлапук та багатьох інших) [1 - 19]. За результатами їхніх досліджень запропоновано уточнення до визначення окремих показників турбулентного руху у трубопроводах та ряд формул для розрахунків їхніх гідравлічних параметрів. Так, дослідження Ф. А. Шевельова показали, що опір у гідравлічно гладких трубах прямо не залежить від висоти виступів шорсткості, але на нього впливає хвилястість поверхні в'язкого підшарку та вид нерівностей стінок труби. А.М. Колмогоров, А.Д. Альтшуль почали розглядати вплив молекулярної та турбулентної в'язкості на дотичні напруження у турбулентному потоці. Отримані ними залежності мають теоретичне значення, але суттєво ускладнюють практичні розрахунки, а в окремих випадках – і подальший математичний аналіз показників турбулентності через громіздкість і складність математичних виразів та взаємозалежність параметрів.

Дослідження, виконані під керівництвом професора М.М. Хлапука [5, 6], розкривають кінематичну структуру потоку при турбулентному режимі, отримано профіль розподілу загальної кінематичної в'язкості, що включає кінематичну в'язкість на внутрішній поверхні трубопроводу та кінематичну в'язкість між шарами потоку. На його основі отримано степеневу залежність профілю осередненої швидкості, яка відповідає граничним умовам на внутрішній поверхні та осі трубопроводу. Встановлено, що розподіл дотичних напружень у перетині труби змінюється не за лінійним, а криволінійним законом. Однак, для кожного виду шорсткості потрібно за експериментальними даними визначати щонайменше один коефіцієнт та один показник степеню, окремі залежності (відстань від осі до точок, що мають середню швидкість) задані у неявній формі. Потребують уточнення залежності місцезнаходження середньої швидкості та розподілу дотичних напружень, як

для гідравлічно гладких труб, так і з різними видами шорсткості.

МЕТА І МЕТОДИ

Метою даної статті є аналіз впливу молекулярної та турбулентної в'язкості рідини на розподіл осереднених місцевих швидкостей у перетинах трубопроводів та уточнення на цій основі залежностей між основними параметрами турбулентних потоків у трубопроводах, а також встановлення відповідності отриманих результатів експериментальним даним.

Дотичне напруження в будь-якій точці перерізу турбулентного потоку, перпендикулярному напрямку його руху у трубопроводі, є сумою в'язкісної і турбулентної складових [1, п. 4.1; 4, ф. 1.24] і визначається залежністю

$$\tau = \mu \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \varepsilon_T \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (1)$$

де μ – динамічна в'язкість рідини, Н·с/м²;
 ε_T – так звана «турбулентна в'язкість», яка залежить від пульсаційних складових осередненої швидкості у визначеній точці потоку \bar{u}_x , Н·с/м²;

y – відстань від стінки труби до визначеної точки потоку (рис. 1), м.

За напівемпіричною теорією турбулентності Прандтля-Кармана у межах турбулентного ядра нехтують в'язкісною складовою дотичних напружень [1 - 4], а залежність (1) набуває вигляду

$$\tau = \varepsilon_T \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \varepsilon_T \cdot \frac{u_*}{\kappa y}, \quad (2)$$

де κ – коефіцієнт пропорційності, який спочатку вважали за «універсальну постійну величину», однак, як показали більш детальні дослідження, він змінюється, як у межах живого перерізу потоку, так і при зміні чисел Рейнольдса Re [1, 3, 4, 7];

u_* – динамічна швидкість, м/с

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \bar{V}_o \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{8}}, \quad (3)$$

де τ_o – дотичне напруження на стінці трубопроводу, Н/м²;

ρ – питома маса рідини, кг/м³;

\bar{V}_o – середня швидкість руху рідини у перерізі труби, м/с;

λ – коефіцієнт гідравлічного тертя.

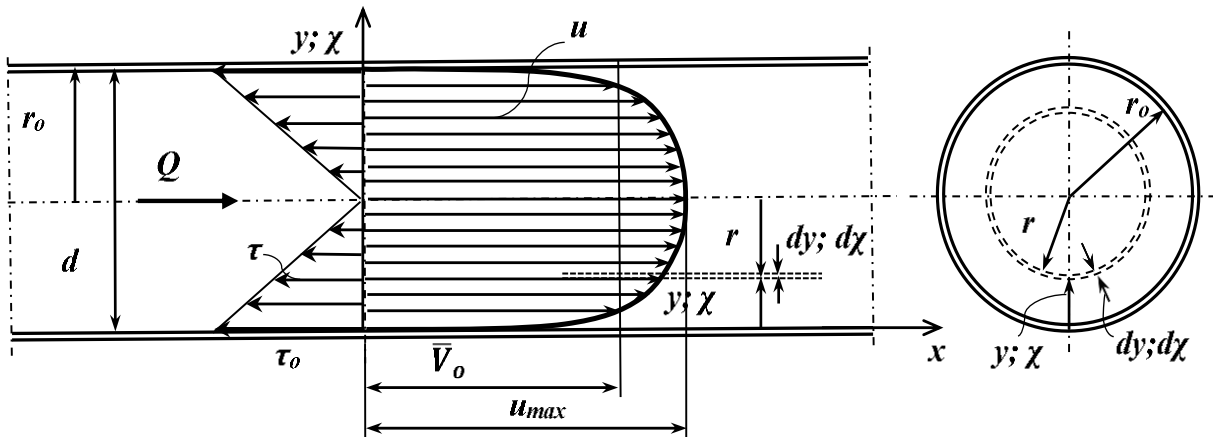


Рис. 1. Схема розподілу дотичних напружень τ і швидкостей u при турбулентному русі рідини у трубопроводі

Fig. 1. Scheme of the distribution of tangential stresses τ and velocities u during the turbulent movement of liquid in the pipeline

Виходячи із формули (2) турбулентна в'язкість ϵ_T становитиме

$$\epsilon_T = \frac{\tau \chi y}{u_*} = \frac{\tau \chi \chi r_o}{u_*}, \quad (4)$$

де χ – відносна відстань від стінки до заданого кільцевого перетину: $\chi = y/r_o$ (рис. 1).

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ПОЯСНЕННЯ

На підставі формул (1) і (4) дотичні напруження у точках перерізу турбулентного потоку становитимуть

$$\tau = \left(\mu + \frac{\tau \chi \chi r_o}{u_*} \right) \cdot \frac{d\bar{u}_x}{r_o \cdot d\chi}; \quad (5)$$

$$\tau \cdot r_o = \frac{\tau \chi r_o}{u_*} \cdot \left(\frac{\mu u_*}{\tau \chi r_o} + \chi \right) \cdot \frac{d\bar{u}_x}{d\chi}. \quad (6)$$

Звідки

$$\frac{u_*}{\chi} = (b_\chi + \chi) \cdot \frac{d\bar{u}_x}{d\chi}. \quad (7)$$

де b_χ – параметр, що враховує вплив молекулярної в'язкості на розподіл осереднених швидкостей у перетині трубопроводу

$$b_\chi = \frac{\mu u_*}{\tau \chi r_o} = \frac{\rho \cdot \vartheta \cdot u_*}{\rho u_*^2 \cdot (1-\chi) \cdot \chi r_o} = \frac{\vartheta}{\chi u_* \cdot (1-\chi) r_o}, \quad (8)$$

де ρ – питома маса рідини, кг/м³;

ϑ – кінематична в'язкість рідини, м²/с.

Залежність (8) для параметра b_χ отримано на підставі формул (3), (6) і (7) із вра-

хуванням, що дотичні напруження у турбулентному потоці змінюються за лінійним законом (рис. 1)

$$\tau = \tau_o \cdot (1 - \chi). \quad (9)$$

На внутрішній поверхні трубопроводу (при $\chi = 0$) залежність (8) для параметра b_χ набуде вигляду

$$b_{\chi=0} = b = \frac{\vartheta}{\chi_p u_* r_o}, \quad (10)$$

де χ_p – коефіцієнт пропорційності, що враховує зміну дотичних напружень у прилежовому шарі, у якому режими руху рідини близькі до ламінарного.

На відміну від прилежового шару в основному потоці переважають турбулентні пульсації, тому для нього значення аналогічного коефіцієнта будуть іншими. Його прийнято рівним $\chi = \chi_o$. Багаточисельні розрахунки з аналізу експериментальних даних [7] показали, що коефіцієнти $\chi_p \neq \chi_o$ і залежать від виду і величини шорсткості, чисел Рейнольдса та діаметрів трубопроводів (рис. 2 і 3). Із врахуванням цього факту і приймаючи надалі $u = \bar{u}_x$, диференціальне рівняння (7) для подальшого аналізу зміни осереднених місцевих швидкостей у перетині трубопроводу матиме вид

$$\frac{du}{d\chi} = \frac{u_*}{\kappa_o \cdot (b + \chi)}. \quad (11)$$

Його розв'язок дозволяє отримати

$$du = \frac{u_* \cdot d\chi}{\kappa_o \cdot (b + \chi)}; \quad (12)$$

$$u = \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \int \frac{d\chi}{(b + \chi)} = \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln(b + \chi) + C, \quad (13)$$

де C – постійна, яку можна отримати двома шляхами:

$$\begin{aligned} \text{1-й: для } \chi = 1: u &= u_{max}; \\ C &= u_{max} - \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln(b + 1), \\ u &= u_{max} - \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln\left(\frac{b+1}{b+\chi}\right); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{2-й: для } \chi = 0: u &= 0; C = -\frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln(b), \\ u &= \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln\left(1 + \frac{\chi}{b}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Подальший аналіз підтвердив ідентичність формул (14) і (15) та їхню відповідність експериментальним даним. Ідентичність формул може бути підтверджена знаходженням максимальної швидкості u_{max} за кожною із них при $\chi = 1$, яка становить

$$u_{max} = \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{b}\right). \quad (16)$$

Формула (14) за своєю структурою відповідає аналогічній формулі (17) класичної напівемпіричної теорії турбулентного руху у трубопроводах [1-4]

$$u = u_{max} - \frac{u_*}{\kappa_o} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{y}\right). \quad (17)$$

Однак, більш простою і більш придатною для подальшого аналізу є формула (15). Її аналіз на крайові умови показує:

- на стінці трубопроводу (при $\chi = 0$) швидкість $u = 0$, тобто крайова умова виконується;
- на осі труби (при $\chi = 1$) перша похідна $du/d\chi \neq 0$ – епюра швидкостей має точку перелому, а отже крайова умова також не виконується, як і у класичній теорії [1-4].

Враховуючи більш просту форму залежності (15), відповідність крайовій умові на внутрішній поверхні трубопроводу та експериментальним даним, її слід прийняти для подальшого теоретичного аналізу турбулентного руху у трубопроводах.

Новий параметр b у формулі (15) є умовно-відносною товщиною примежового шару, яка із врахуванням формули (3), отримує залежність

$$b = \frac{\vartheta}{\kappa_p \cdot u_* \cdot r_o} = \frac{2 \cdot \vartheta}{\kappa_p \cdot \bar{V}_o \cdot 2 \cdot r_o \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{\kappa_p \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}}, \quad (18)$$

де Re – число Рейнольдса: $Re = \mathcal{G}/(\bar{V}_o \cdot d)$; d – діаметр трубопроводу: $d = 2r_o$.

Із формули (8) витікає, що на поверхні примежового шару зі сторони турбулентного ядра при $\chi = 0$ відносна товщина примежового шару становитиме

$$b_o = \frac{\vartheta}{\kappa_o \cdot u_* \cdot r_o}. \quad (19)$$

З іншої сторони вона рівна

$$b_o = \frac{\delta_n}{r_o}, \quad (20)$$

де δ_n – геометрична товщина примежового шару, мм, або, м, відповідно до одиниць вимірювання радіуса r_o , яка на підставі формул (10), (18) і (19), приймаючи надалі $b = b_o$, отримує залежність

$$\delta_n = b \cdot \frac{\kappa_p}{\kappa_o} \cdot r_o \quad (21)$$

Для перевірки адекватності формул (14) і (15) було оброблено експериментальні дані [7], достовірність яких була підтверджена кількома поколіннями науковців та інженерів-гідравліків [1-4]. Для цього було оброблено, отримані у лабораторних умовах, масиви розподілу осереднених місцевих швидкостей у живих перетинах трубопроводів для сталевих ($d = 16,0 - 302,0$ мм – 30 масивів $u = f(\chi)$) і чавунних труб ($d = 52,0 - 301,0$ мм – 18 масивів $u = f(\chi)$) при різних значеннях середніх швидкостей \bar{V}_o та способах з'єднання [7]. За умови найкращого наближення аналітичних залежностей (14) і (15) до експериментальних точок визначено параметри κ_p , κ_o , b і δ_n . Для цього за виходячи із формул (3), (16), (18) і (21) сформовано такі залежності

$$b = \frac{\vartheta}{\kappa_p \cdot \bar{V}_o \cdot r_o} \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{\kappa_p \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}}; \quad (22)$$

$$\kappa_o = \frac{\bar{V}_o}{u_{max}} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{8}}; \quad (23)$$

$$\delta_{\pi} = b \cdot \frac{\kappa_p}{\kappa_o} \cdot r_o = \frac{1000 \cdot \vartheta}{\kappa_o \cdot \bar{V}_o} \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (24)$$

Крім того, на основі формули (15) визначено:

- співвідношення між середньою \bar{V}_o і максимальною швидкостями u_{max}

$$\frac{\bar{V}_o}{u_{max}} = \frac{\kappa_o}{\ln\left(1+\frac{1}{b}\right)} \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}}; \quad (25)$$

- відстань від стінки до точок із середньою швидкістю

$$\bar{\chi}_{cp} = b \cdot \left(e^{\kappa_o \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}}} - 1 \right). \quad (26)$$

Для оцінки точності визначення зазначених параметрів за формулами (22) ÷ (26) було розраховано величини середніх квадратичних відхилень між розрахунковими та

експериментальними значеннями швидкостей u , які склали $\Delta_{ср.кв} = 0,0005 \div 0,0042$, і в основному не перевищували 0,3 %. Абсолютні значення відхилень, в основному, становили 0,02 ÷ 0,5 %. Найбільші відхилення, в окремих випадках, припадали на точки, розташовані біля стінок труб (до 10 %), що можна пояснити великими градієнтами швидкостей у пристінкових зонах та залежними від них вимогами до дуже точного розташування вимірювальних напірних трубок. До речі, аналогічні відхилення мали місце і при апроксимації залежностями $u = f(y)$ класичної напівемпіричної теорії. Приклади відповідності залежностей (14) і (15) експериментальним даним та їхньому класичному аналогу (17) наведено на рис. 2.

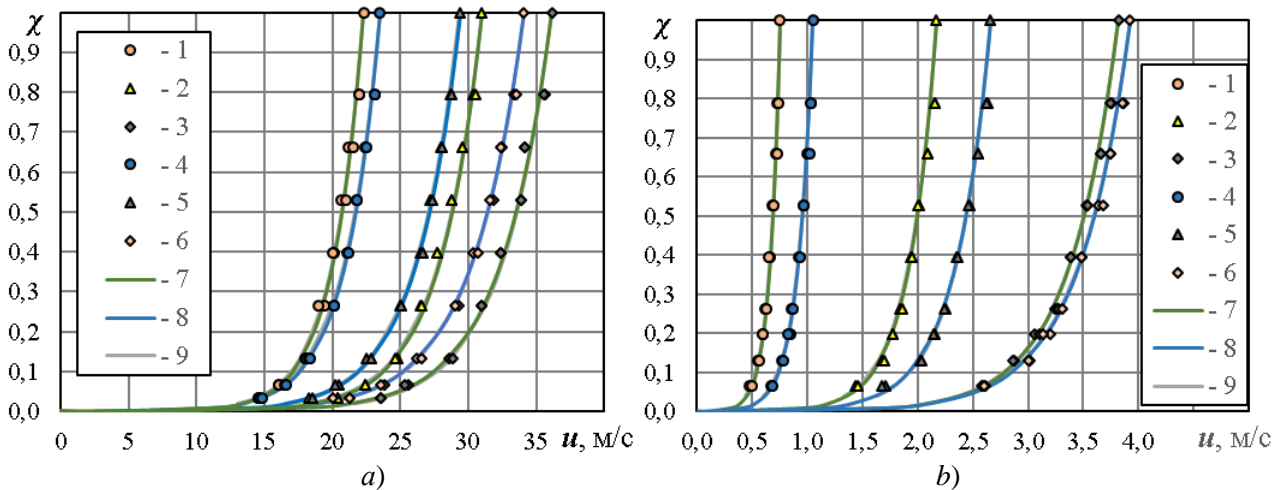


Рис. 2. Графіки розподілу місцевих осереднених швидкостей u у перетинах трубопроводів із:
 а) сталевих труб ($d = 302,0$ мм – випробування повітрям): 1 – 3 – експериментальні точки для труб без стиків із середніми швидкостями \bar{V}_o , м/с: 1 – $\bar{V}_o = 19,0$; 2 – $\bar{V}_o = 26,4$; 3 – $\bar{V}_o = 30,9$; 4 – 6 – те ж, зі стиками через 1,5 м: 4 – $\bar{V}_o = 19,7$; 5 – $\bar{V}_o = 24,7$; 6 – $\bar{V}_o = 28,6$; 7 і 8 – аналітичні залежності за формулою (15); 9 – те ж, за формулою (17);
 б) чавунних труб ($d = 152,0$ мм – випробування водою): 1 – 3 – експериментальні точки для труб зі стиками через 3,1 м із \bar{V}_o , м/с: 1 – $\bar{V}_o = 0,616$; 2 – $\bar{V}_o = 1,81$; 3 – $\bar{V}_o = 3,17$; 4 – 6 – те ж, зі стиками через 0,775 м: 4 – $\bar{V}_o = 0,855$; 5 – $\bar{V}_o = 2,20$; 6 – $\bar{V}_o = 3,25$; 7 і 8 – аналітичні залежності за формулою (15); 9 – те ж, за формулою (17)

Fig. 2. Graphs of the distribution of local average velocities u in pipeline intersections with:
 а) steel pipes ($d = 302.0$ mm – air test): 1 – 3 – experimental points for pipes without joints with average velocities \bar{V}_o , m/s: 1 – $\bar{V}_o = 19.0$; 2 – $\bar{V}_o = 26.4$; 3 – $\bar{V}_o = 30.9$; 4 – 6 – the same, with joints after 1.5 m: 4 – $\bar{V}_o = 19.7$; 5 – $\bar{V}_o = 24.7$; 6 – $\bar{V}_o = 28.6$; 7 and 8 – analytical dependences according to formula (15); 9 – the same, according to formula (17);
 б) cast iron pipes ($d = 152.0$ mm – water test): 1 – 3 – experimental points for pipes with joints after 3.1 m with \bar{V}_o , m/s: 1 – $\bar{V}_o = 0.616$; 2 – $\bar{V}_o = 1.81$; 3 – $\bar{V}_o = 3.17$; 4 – 6 – the same, with joints after 0.775 m: 4 – $\bar{V}_o = 0.855$; 5 – $\bar{V}_o = 2.20$; 6 – $\bar{V}_o = 3.25$; 7 and 8 – analytical dependences according to formula (15); 9 is the same, according to formula (17)

Наведені дані підтверджують практично цілковите співпадіння результатів розрахунків за новими формулами (14) і (15) та відомою (17). Однак, вони дозволяють розширити діапазон оцінки показників турбу-

лентного руху рідин у трубопроводах на основі додаткових залежностей (22) ÷ (26), приклади яких за проаналізованими експериментальними даними для сталевих і чавунних труб наведено на рис. 3 ÷ 5.

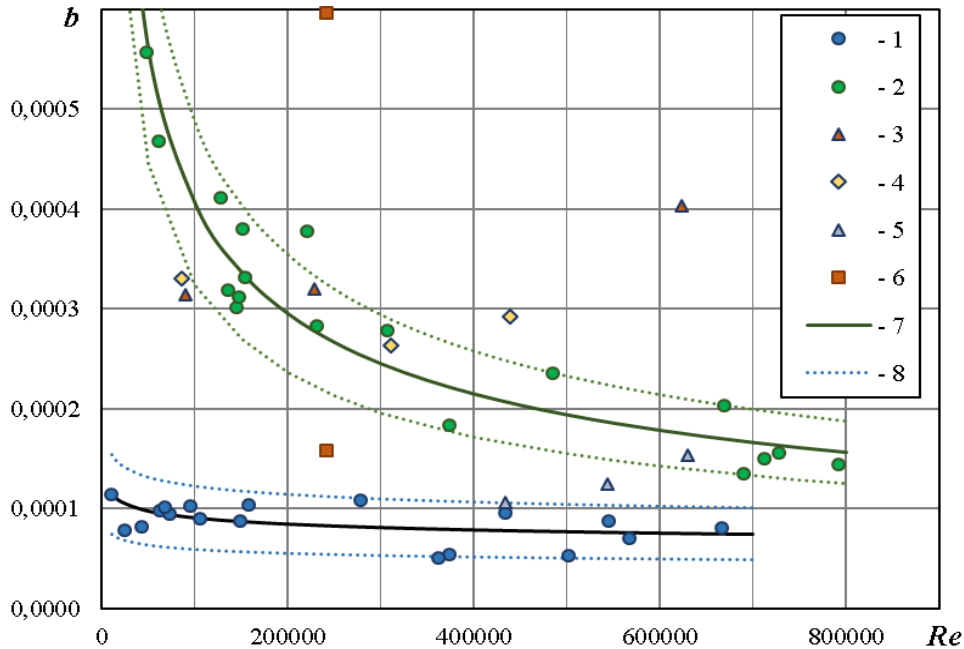


Рис. 3. Графіки залежностей $b = f(Re)$: 1 – експериментальні точки для нових сталевих труб без стиків $d = 16 \div 302$ мм; 2 – те ж, для нових чавунних труб $d = 52 \div 301$ мм довжиною $l = 0,5 \div 3,1$ м; 3 – те ж, для нових сталевих труб $d = 79$ мм зі стиками через 0,375 м; 4 – те ж, для $d = 155,1$ мм зі стиками через 0,375 м; 5 – те ж, для $d = 302,0$ мм зі стиками через 1,5 м; 6 – те ж, для труб $d = 52,4$ мм із регулярною шорсткістю; 7 – апроксимаційні лінії залежностей $b = f(Re)$, відповідно, для нових чавунних та нових сталевих труб без стиків; 8 – границі діапазону граничних відхилень

Fig. 3. Graphs of dependencies $b = f(Re)$: 1 – experimental points for new steel pipes without joints $d = 16 \div 302$ mm; 2 – the same, for new cast iron pipes $d = 52 \div 301$ mm with a length of $l = 0.5 \div 3.1$ m; 3 – the same, for new steel pipes $d = 79$ mm with joints after 0.375 m; 4 – the same, for $d = 155.1$ mm with joints after 0.375 m; 5 – the same, for $d = 302.0$ mm with joints after 1.5 m; 6 – the same, for pipes $d = 52.4$ mm with regular roughness; 7 – approximation lines of dependencies $b = f(Re)$, respectively, for new cast iron and new steel pipes without joints; 8 – limits of the range of extreme deviations

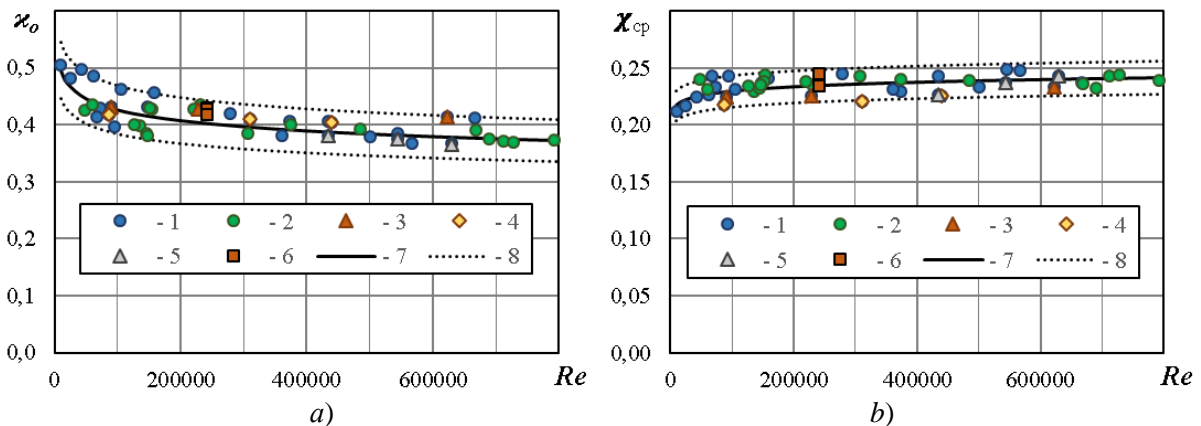


Рис. 4 Графіки залежностей: а) $\lambda_0 = f(Re)$; б) $\lambda_{cp} = f(Re)$: 1 – 8 – позначення згідно рис. 3

Fig. 4. Graphs of dependencies: а) $\lambda_0 = f(Re)$; б) $\lambda_{cp} = f(Re)$: 1 – 8 – notation according to fig. 3

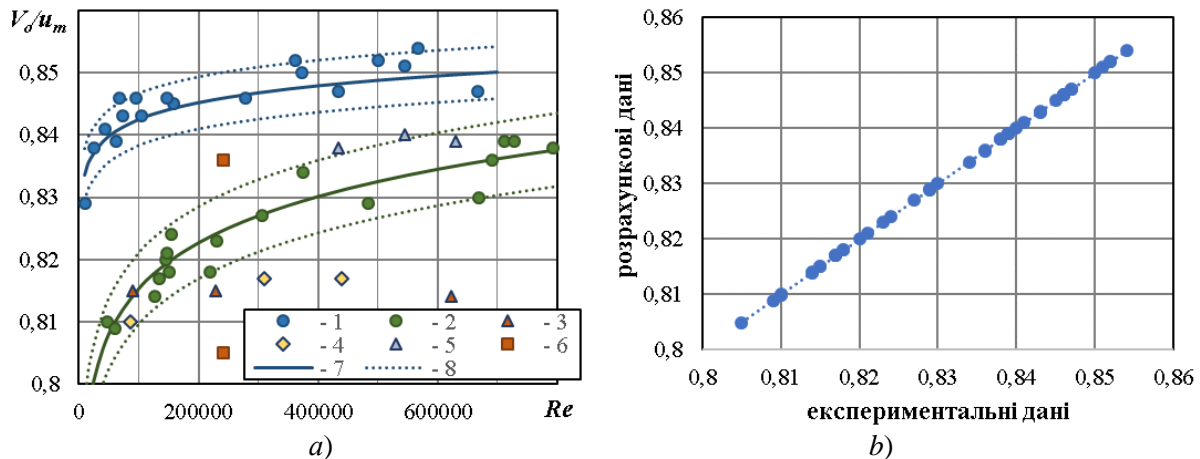


Рис. 5. Графіки залежностей: а) $\bar{V}_o/u_{max} = f(Re)$; б) \bar{V}_o/u_{max} , розрахованих за формулами (25) і отриманих експериментальним шляхом: 1 – 8 – позначення згідно рис. 3

Fig. 5. Graphs of dependencies: а) $\bar{V}_o/u_{max} = f(Re)$; б) \bar{V}_o/u_{max} , calculated according to formulas (25) and obtained experimentally: 1 – 8 – notation according to fig. 3

Аналіз залежностей (22) ÷ (26) та рис. 3 ÷ 5 показує, що визначальним параметром у них є умовна відносна товщина прирежового шару b , абсолютні величини якої суттєво залежать від величини і виду шорсткості. Так, дані рис. 3 засвідчують явну залежність $b = f(Re)$, для нових чавунних труб та сталевих без стиків. Однак, для тих же сталевих труб, але зі стиками значення b суттєво відрізняються попередніх (позиції 3, 4 і 5). При цьому, чим менша відстань між стиками – тим більша різниця між b для труб без стиків і зі стиками. Для труб із різними варіантами регулярної шорсткості (розташування на внутрішній поверхні труби циліндриків діаметром 5 і висотою 2,4 мм у шахматному порядку) ця різниця є ще більшою – при зменшенні відстані між елементами шорсткості значення b (позиція б) зростають від 0,00016 до 0,0038 (третья точка – за межами графіка). Відхилення від апроксимаційних ліній для труб з однако-вим типом шорсткості вказує на суттєву залежність параметрів b від величин окремих виступів та їхнього розташування на внутрішній поверхні труби.

Крім типу шорсткості на зміну параметрів κ_p , κ_o , b і δ_p впливають і інші фактори. Так, Шевельов Ф.А. експериментально встановив залежність коефіцієнта κ_o від діаметрів труб [7]. Така ж залежність існує і від інших факторів, зокрема, місцевих опо-

рів у трубах [4, 8, 14, 15, 19]. Однак, більшість із них ще потребують додаткових як теоретичних, так і експериментальних досліджень. Наприклад, зміни залежностей $\bar{V}_o/u_{max} = f(Re)$ (рис. 5а) обумовлені як типом шорсткості внутрішньої поверхні труб, так і наявністю стикових з'єднань. Це наглядно підтверджують дані для нових чавунних і сталевих труб без стиків та зі стиками, наявність яких (точки 3, 4 і 5) вносить значні зміни у ці величини. Суттєвий вплив має і відносна шорсткість труб Δ/d [1, 3, 7, 8], яка залежить від величин їхніх діаметрів. При цьому, слід відміти, що наведені значення \bar{V}_o/u_{max} були отримані експериментальним шляхом у лабораторних умовах, і похибки їх визначення були зведені до мінімуму. Підтвердженням цього та доцільності застосування параметра b у формулах (14) і (15) є абсолютне співпадіння значень \bar{V}_o/u_{max} , отриманих в ході експериментів та розрахунками за формулою (25) (рис. 5б).

Для знаходження залежності коефіцієнта гідравлічного тертя λ від параметрів b і κ_o на основі формули (15) визначено середню швидкість у перетині трубопроводу \bar{V}_o . Для цього, відповідно до схеми рис. 1, розраховано витрату води у живому перетині

$$Q = \int_0^{r_o} u \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot r_o^2 \cdot \int_1^0 u \cdot (\chi - 1) \cdot d\chi = \dots =$$

$$= \frac{\pi \cdot u_* \cdot r_o^2}{\kappa_o} \cdot \left[\left(1 + b\right)^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) - b - 1,5 \right]; \quad (27)$$

Нехтуючи дуже малими значеннями величин b у їхніх сумах із 1,0 та 1,5 ($b \ll 0,001$, див. рис. 3) та, приймаючи значення динамічної швидкості за формулою (3), отримуємо

$$\bar{V}_o = \frac{Q}{\pi r_o^2} = \frac{\bar{V}_o}{\kappa_o} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot \left[\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) - 1,5 \right], \quad (28)$$

звідки

$$\lambda = \frac{8 \cdot \kappa_o^2}{\left[\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) - 1,5 \right]^2}. \quad (29)$$

Похибки при нехтуванні окремими значеннями параметра b ($b = 0,00001 \div 0,001$) у формулах (28) і (29) при розрахунках величин \bar{V}_o складають (0,002 \div 0,2) %, а λ – (0,004 \div 0,4) %. Отже, формула (29) може бути прийнятною для подальшого теоретичного аналізу залежностей між параметрами турбулентного руху рідин у трубопроводах та для обчислень коефіцієнтів гідравлічного тертя.

На основі формули (29) із врахуванням (3), (15) і (25) уточнено залежності для:

- параметра κ_o (додатково до (23))

$$\kappa_o = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) - 1,5 \right); \quad (30)$$

- співвідношення середньої і максимальної швидкостей (додатково до (25))

$$\frac{\bar{V}_o}{u_{max}} = \frac{\kappa_o}{\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right)} \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right) - 1,5}{\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right)} = 1 - \frac{1,5}{\ln\left(1 + \frac{1}{b}\right)}; \quad (31)$$

- параметра b (додатково до (22))

$$b = \frac{1}{e^{\psi} - 1}, \quad \text{де } \psi = \frac{1,5}{1 - \frac{\bar{V}_o}{u_{max}}}. \quad (32)$$

Зазначені формули є вихідними для обчислення невідомих параметрів чи їхніх залежностей від числа Рейнольдса або від інших параметрів, отриманих експериментально. Найчастіше у процесі експериментів визначають коефіцієнти гідравлічного тертя λ і співвідношення середньої і максимальної швидкостей \bar{V}_o/u_{max} [1, 7, 14] та їхні залежності $\lambda = f(Re)$ і $\bar{V}_o/u_{max} = f(Re)$. Так, для гідравлічно гладких труб, такими залежностями, отриманими на основі експериментальних даних, можуть бути (рис. 6):

- формула Прандля-Кольбрука [1, 4, 7]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \cdot \lg\left(\frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2,51}\right); \quad (33)$$

- формула Альтшуля [1]

$$\frac{\bar{V}_o}{u_{max}} = 1 - \frac{0,835}{\lg(Re)}. \quad (34)$$

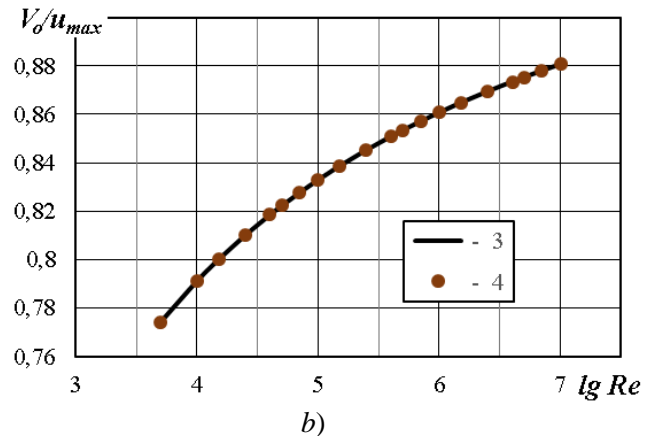
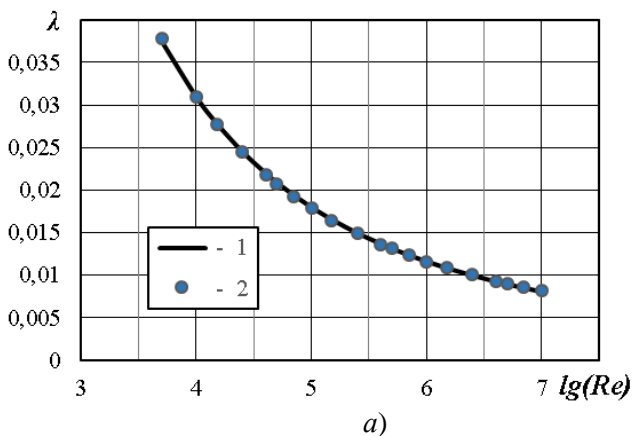


Рис. 6. Графіки залежностей для гідравлічно гладких труб: а) коефіцієнтів гідравлічного тертя $\lambda = f(Re)$; б) співвідношень середніх швидкостей до максимальних $\bar{V}_o/u_{max} = f(Re)$; 1 – розрахованих за формулою (33); 2 – те ж, за (38); 3 – те ж, за (34); 4 – те ж, за (25)

Fig. 6. Graphs of dependencies for hydraulically smooth pipes: a) coefficients of hydraulic friction $\lambda = f(Re)$; b) ratios of average velocities to maximum $\bar{V}_o/u_{max} = f(Re)$; 1 – calculated according to formula (33); 2 – the same, according to (38); 3 – the same, according to (34); 4 – the same, according to (25)

Ці формули отримані на основі ретельних досліджень гідралічних опорів Нікурадзе у 30-х роках 20 століття, підтверджені багатьма пізнішими експериментальними даними і можуть вважатися еталонними для гідралічно гладких труб. На їхній основі визначено числові значення параметрів λ і \bar{V}_o/u_{max} для широкого діапазону чисел Рейнольдса $Re = 5000 \div 10^7$ (рис. 6). Після підстановки цих величин у формули (26), (30) і (32) отримано графіки зміни параметрів $\bar{\chi}_{cp}$, χ_o і b від чисел Рейнольдса та їхні апроксимаційні залежності (рис. 7).

Суцільні лінії графіків, наведених на рис. 7 відповідають «класичним» залежностям, достовірність яких підтверджена ба-

гатьма експериментальними даними. Розраховані за отриманими формулами (25) і (38) дані відмічені точками. Вони практично співпадають із суцільними лініями (відхилення становлять не більше 0,7 % для λ і 0,006 % для \bar{V}_o/u_{max} у широкому діапазоні чисел Рейнольдса Re). При цьому найбільші відхилення припадають на крайні нижні точки діапазону: $Re < 7000$.

На рис. 7г наведено графік для коефіцієнта пропорційності, що враховує зміну дотичних напружень у прилежовому шарі, $\chi_p = f(Re)$. Його значення розраховано на підставі формули (23) за залежністю

$$\chi_p = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{b \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}} \quad (35)$$

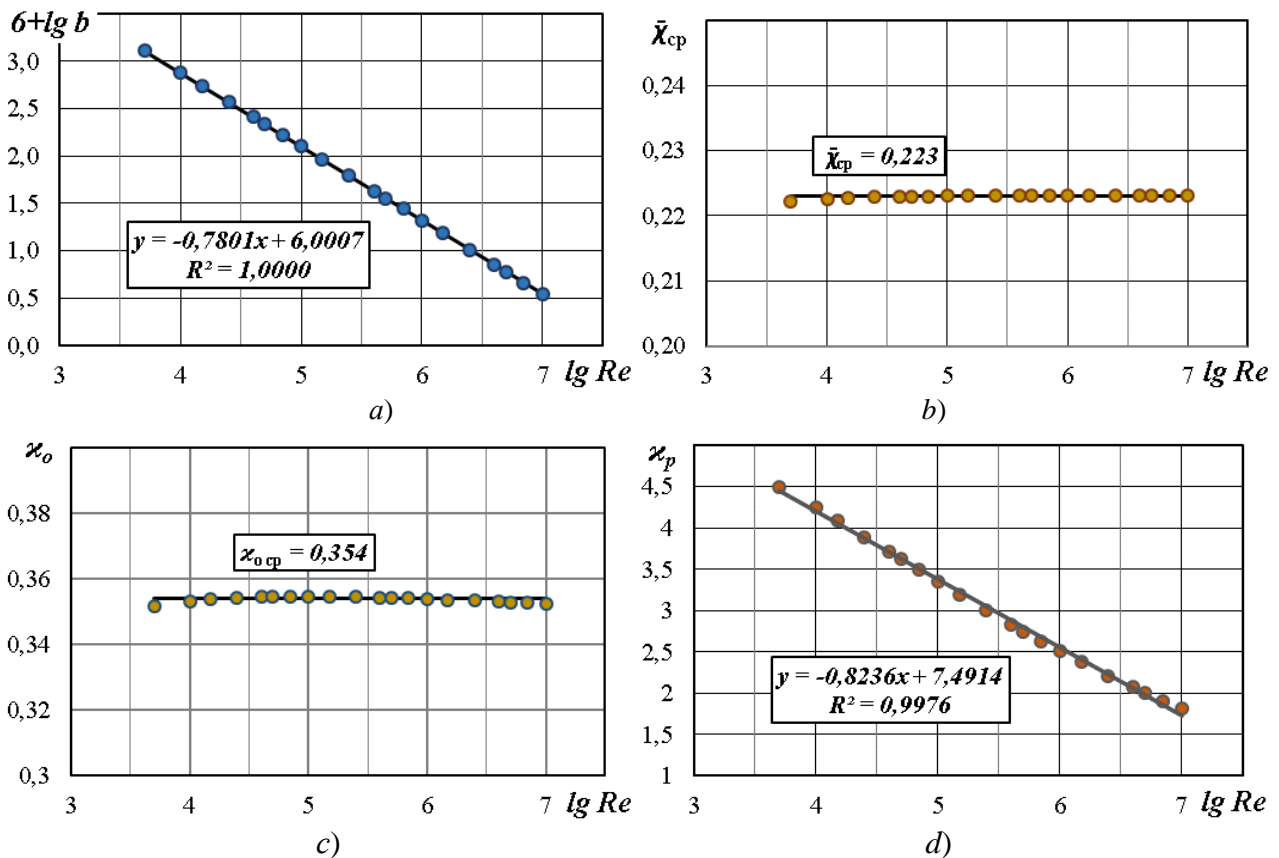


Рис. 7. Графіки залежностей від чисел Рейнольдса Re : а) умовної відносної товщини прилежового шару b ; б) відстані від стінки до точок із середньою швидкістю потоку \bar{V}_o ; в) і д) коефіцієнтів χ_o і χ_p для гідралічно гладких труб

Fig. 7. Graphs of dependencies on Reynolds numbers Re : а) conditional relative thickness of the boundary layer b ; б) distances from the wall to points with the average flow speed \bar{V}_o ; в) and д) coefficients χ_o and χ_p for hydraulically smooth pipes

Наведені на рис. 7 дані показують, що параметри $\bar{\chi}_{cp}$ і χ_o практично не залежать від чисел Рейнольдса і становлять: $\bar{\chi}_{cp} = 0,223$;

$\chi_o = 0,354$ (відхилення не перевищують 0,6 %). Параметри b і χ_p мають лінійну залежність від логарифмів чисел Рейнольдса

і з високою точністю (вірогідності апроксимації $R^2 > 0,997$, а відхилення від чисельних величин $\delta\% < 0,1\%$ для b і $\delta\% < 2,0\%$ - для κ_p) можуть бути представлені залежностями

$$b = \frac{1}{Re^{0,78}}; \quad (36)$$

$$\kappa_p = 7,5 - 0,824 \cdot \lg Re. \quad (37)$$

На підставі формул (29) і (36) та із врахуванням, що $\kappa_o = 0,354$, отримано

$$\lambda = \frac{8\kappa_o^2}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{b}\right)-1,5\right]^2} = \frac{8 \cdot 0,354^2}{\left[\ln(1+Re^{0,78})-1,5\right]^2} = \frac{1}{\left[\ln(1+Re^{0,78})-1,5\right]^2}. \quad (38)$$

Валідність отриманих залежностей і величин параметрів підтверджується практично повним співпадінням результатів розрахунків за отриманою формулою (38) із результатами формули Прандля-Кольбрука (33), у якій пошуковий аргумент – коефіцієнт гідравлічного тертя λ задано у неявній

формі. При цьому значення $\bar{\chi}_{cp} = 0,223$ відповідає теоретичним дослідженням Альтшуля і експериментальним даним Нікурадзе для гідравлічно гладких труб [1, п. 2.2 і 5.2]. Отримана теоретичним шляхом величина параметра $\kappa_o = 0,354$ вказує на особливі умови турбулентних потоків у гідравлічно гладких трубах.

Абсолютні значення геометричної товщини прилежого шару δ_n можуть бути розраховані за формулою (24) із врахуванням вхідних до неї параметрів за формулами (36) і (37). Однак, чисельні розрахунки за формулою (24) дозволили отримати наглядні графіки залежності $\delta_n/r_o = f(Re)$ і більш простий її аналітичний вираз, що із високою вірогідністю апроксимації ($R^2 = 0,9999$) відповідає чисельним даним (рис. 8)

$$\frac{\delta_n}{r_o} = \frac{37,662}{Re^{0,902}}. \quad (39)$$

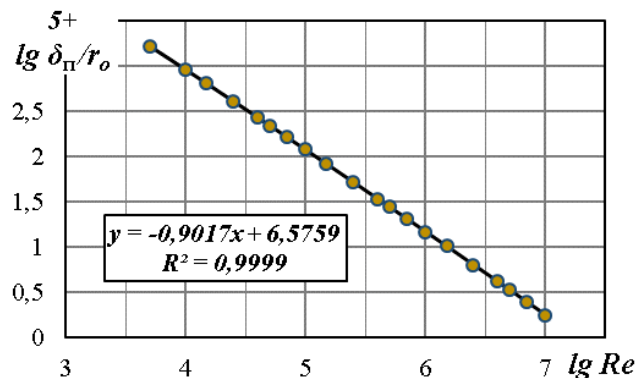
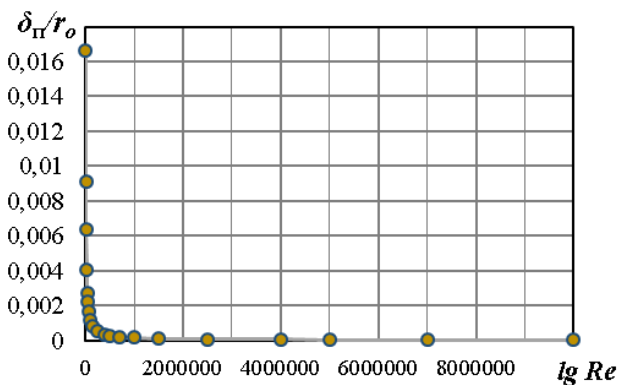


Рис. 8. Графіки залежності відносної геометричної товщини прилежого шару від чисел Рейнольдса $\delta_n/r_o = f(Re)$: а) у звичайних координатах; б) у логарифмічних координатах

Fig. 8. Graphs of the dependence of the relative geometric thickness of the boundary layer on Reynolds numbers $\delta_n/r_o = f(Re)$: а) in ordinary coordinates; б) in logarithmic coordinates

ВИСНОВКИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ

Оцінку закономірностей між параметрами турбулентного руху потоків у трубопроводах проведено за показниками молекулярної та турбулентної в'язкості із введенням у розрахунки умовної відносної товщини прилежого шару на стінках трубопроводів. Отримано уточнені формули (14) і (15) для розподілу осереднених швидкостей у поперечних перетинах трубопроводів

та нові теоретичні залежності (22) ÷ (29) між основними параметрами турбулентних потоків у трубах. Їхня адекватність підтверджена відповідністю розрахункових величин осереднених швидкостей великому масиву експериментальних даних, які було закладено в основу чинних нормативів для гідравлічних розрахунків водопровідних труб.

Для гідравлічно гладких труб отримано нову явного виду залежність (38) коефіцієнта гідравлічного тертя від числа Рейнольдса, яка практично повністю відповідає відомій формулі Прандля-Кольбука, що має неявну форму для визначення цього коефіцієнта. Визначено числові значення та аналітичні залежності між параметрами, що дає змогу по-новому оцінити турбулентні потоки у трубопроводах.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Альтшуль А. Д.** Гидравлические сопротивления. Москва: Недра, 1982. 224 с.
2. **Большаков В. А., Константинов Ю. М., Попов В. Н. и др.** Справочник по гидравлике. Киев: Вища школа, 1984. 343 с.
3. **Константинов Ю. М., Гіжа О. О.** Технічна механіка рідин та газу. Підручник. Київ: Вища школа, 2002. 277 с.
4. **Ткачук О. А.** Гідравлічні розрахунки трубопроводних систем водопостачання та водовідведення : Монографія. Рівне : НУВГП, 2022. 183 с.
5. **Хлапук М. М., Мошинський В. С., Безусяк О. В., Волк Л. Р.** До розвитку теорії руху потоку в трубопроводах при турбулентному режимі // Вісник НУВГП 2019. (3(87)), С. 3-18.
6. **Хлапук М. М., Мошинський В. С., Безусяк О. В., Волк Л. Р.** Дослідження профілю осередненої швидкості потоку в трубопроводах при турбулентному режимі в області гідравлічно гладкого опору // Вісник НУВГП, 2020, (1(89)). С. 3-11.
7. **Шевелев Ф. А.** Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах. Москва: Стройиздат, 1953. 208 с.
8. **Brkić D.** A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016. 93, 513-515. URL: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.08.109>
9. **Choo, Y.-M.; Kim, J.-G.; Park, S.-H.** A Study on the Friction Factor and Reynolds Number Relationship for Flow in Smooth and Rough Channels // Water, 2021, 13, 1714. URL: <https://doi.org/10.3390/w13121714>
10. **Dutta, P.; Nandi, N.** Effect of Reynolds Number and Curvature Ratio on Single Phase Turbulent Flow in Pipe Bends // Mechanics and Mechanical Engineering, 2015, Vol. 19, No. 1. P. 5–16.
11. **Fluid Flow Friction Loss - Hazen-Williams Coefficients.** URL: https://www.engineeringtoolbox.com/hazen-williams-coefficients-d_798.html
12. **Hultmark M., Vallikivi M., Bailey S. C. C., Smits A. J.** Logarithmic scaling of turbulence in smooth- and rough-wall pipe flow // Journal of Fluid Mechanics, 2013. Vol. 728, pp. 376-395 URL: https://fluids.princeton.edu/pubs/Hultmark_et_al_2013.pdf
13. **Kalenik, M.; Chalecki, M.; Wichowski, P.** Real Values of Local Resistance Coefficients during Water Flow through Welded Polypropylene T-Junctions // Water, 2020, 12, 895. <https://doi.org/10.3390/w12030895>
14. **Neto O. R., Botrel T. A., Frizzone J. A., Camargo A. P.** Method for determining friction head loss along elastic pipes // Irrigation Science, 2014. 32 (5): pp. 329-339.
15. **Orel, V., Pitsyshyn, B., Konyk T.** Hydrodynamical instability of newtonian flow before an axisymmetric sudden contraction // Theory and Building Practice. 2021, 3(2), pp. 32–38.
16. **Pérez Pupo, J. R., Navarro-Ojeda, M. N., Pérez-Guerrero, J. N., Batista-Zaldívar, M.A.** On the explicit expressions for the determination of the friction factor in turbulent regime // Revista Mexicana de Ingeniera Quimica, 2020, 19(1), p. 313-334. URL: <https://doi.org/10.24275/rmiq/Fen497>
17. **Rollmann P., Spindler K.** Explicit representation of the implicit Colebrook–White equation // Case Studies in Thermal Engineering. Eng., 2015. 5, pp. 41–47.
18. **Samie M., Marusic I., Hutchins N., Fu M.K., Fan Y., Hultmark M., Smits A. J.** Fully-resolved measurements of turbulent boundary layer flows up to $Re_\tau = 20000$ // Journal of Fluid Mechanics, 2018. Vol. 851, pp. 391-415. URL: https://fluids.princeton.edu/pubs/Samie_2018.pdf
19. **Shaikh M.M., Massan S.R., Wagan A.I.** A new explicit approximation to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015, 88 , pp. 538-543.
20. **Wichowski, P., Kalenik, M., Lal, A., Morawski, D., Chalecki, M.** Hydraulic and technological investigations of a phenomenon responsible for increase of major head losses in exploited cast-iron water supply pipes // Water (Switzerland), 2021. URL: <https://www.mdpi.com/2073-4441/13/11/1604>

REFERENCES

1. **Altschul, A. D. (1982)** *Hydraulic resistance*. Moscow: Nedra. [in Russian]
2. **Bolshakov, V. A., Konstantinov, Yu. M., Popov, V. N. and others (1984)**. *Handbook of hydraulics*. Kyiv: Higher School. [in Russian]
3. **Konstantinov, Yu. M., & Gizha, O. O. (2002)** *Technical mechanics of liquids and gases. Textbook*. Kyiv: Higher School. [in Ukrainian]
4. **Tkachuk, O. A. (2022)** *Hydraulic calculations of pipeline systems of water supply and drainage: Monograph*. Rivne: NUWEE. [in Ukrainian]
5. **Khlapuk, M. M., Moshynskyi, V. S., Bezusiak, O. V., & Volk, L. R. (2019)** To the development of the theory of flow movement in pipelines in the turbulent regime. *Bulletin National University of Water and Environmental Engineering*, 3(87). 3- 18. [in Ukrainian]
6. **Khlapuk, M. M., Moshynskyi, V. S., Bezusiak, O. V., & Volk, L. R. (2020)** Investigation of the profile of the average flow velocity in pipelines in the turbulent regime in the area of hydraulically smooth resistance., *Bulletin National University of Water and Environmental Engineering*, 1(89). 3-11. [in Ukrainian]
7. **Shevelev, F. A. (1953)** *Investigation of the main hydraulic regularities of turbulent motion in pipes*. Moscow: Stroyizdat. [in Russian]
8. **Brkić, D. (2016)** A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93, 513-515. <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.08.109>
9. **Choo, Y.-M.; Kim, J.-G.; Park, S.-H. (2021)** A Study on the Friction Factor and Reynolds Number Relationship for Flow in Smooth and Rough Channels. *Water*, 13, 1714. <https://doi.org/10.3390/w13121714>
10. **Dutta, P.; & Nandi, N. (2015)** Effect of Reynolds Number and Curvature Ratio on Single Phase Turbulent Flow in Pipe Bends. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 19(1). 5–16. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/282884519_Effect_of_Reynolds_number_and_curvature_ratio_on_single_phase_turbulent_flow_in_pipe_bends
11. **Engineering ToolBox, (2004)**. *Fluid Flow Friction Loss - Hazen-Williams Coefficients*. [online] Available at: https://www.engineeringtoolbox.com/hazen-williams-coefficients-d_798.html
12. **Hultmark, M., Vallikivi, M., Bailey, S. C. C., & Smits, A. J. (2013)** Logarithmic scaling of turbulence in smooth- and rough-wall pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 728. 376-395 Retrieved from https://fluids.princeton.edu/pubs/Hultmark_et_al_2013.pdf
13. **Kalenik, M., Chalecki, M., & Wichowski, P. (2020)** Real Values of Local Resistance Coefficients during Water Flow through Welded Polypropylene T-Junctions. *Water*, 12, 895. <https://doi.org/10.3390/w12030895>
14. **Neto, O. R., Botrel, T. A., Frizzone, J. A., Camargo, A. P. (2014)** Method for determining friction head loss along elastic pipes. *Irrigation Science*, 32(5). 329-339. <https://doi.org/10.1007/s00271-014-0431-7>
15. **Orel, V., Pitsyshyn, B., & Konyk T. (2021)** Hydrodynamical instability of newtonian flow before an axisymmetric sudden contraction. *Theory and Building Practice*. 3(2). 32 – 38. <https://doi.org/10.23939/jtbp2021.02.032>
16. **Pérez Pupo, J. R., Navarro-Ojeda, M. N., Pérez-Guerrero, J. N., & Batista-Zaldívar, M. A. (2020)** On the explicit expressions for the determination of the friction factor in turbulent regime. *Revista Mexicana de Ingeniera Quimica*, 19(1). 313-334. <https://doi.org/10.24275/rmiq/Fen497>
17. **Rollmann, P., & Spindler, K. (2015)** Explicit representation of the implicit Colebrook–White equation. *Case Studies in Thermal Engineering*, 5, 41–47. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2014.12.001>
18. **Samie, M., Marusic, I., Hutchins, N., Fu M. K., Fan, Y., Hultmark, M., & Smits, A. J. (2018)** Fully-resolved measurements of turbulent boundary layer flows up to $Re_\tau = 20000$. *Journal of Fluid Mechanics*, 851. 391-415. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.508>
19. **Shaikh, M. M., Massan, S. R., Wagan, A. I. (2015)**. A new explicit approximation to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 88. 538-543. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.006>
20. **Wichowski, P., Kalenik, M., Lal, A., Morawski, D., Chalecki, M. (2021)** Hydraulic and technological investigations of a phenomenon responsible for increase of major head losses in exploited cast-iron water supply pipes. *Water*, 13(11). 16004. <https://doi.org/10.3390/w13111604>

To the development of hydraulic regulations of turbulent flows in pipelines

Oleksandr Tkachuk, Olha Shevchuk

Abstract. The results of the theoretical analysis of the turbulent movement of water in pipelines are given. It is proposed to evaluate the parameters of turbulent flows based on the indicators of molecular and turbulent viscosity with the introduction of the conditional relative thickness of the boundary layer into the calculations. The dependencies of the logarithmic law of the distribution of averaged velocities in the cross-sections of pipelines have been clarified. Unlike similar formulas of the semi-empirical theory of turbulent motion, they correspond to the boundary conditions on the pipeline wall. New theoretical dependencies between the main parameters of turbulent flows in pipelines were obtained. It is proved that the magnitude of the coefficients of hydraulic friction is determined by two parameters: the conditional relative thickness of the boundary layer and the proportionality factor, which takes into account the change in tangential stresses in the turbulent flow. The adequacy of the obtained dependencies is confirmed by their correspondence to the experimental data of the hydraulic dependencies of turbulent flows, on the basis of which the current standards for hydraulic calculations of water pipes were developed. For hydraulically smooth pipes, an explicit dependence was obtained for hydraulic friction coefficients in a wide range of Reynolds numbers (from $7 \cdot 10^3$ to 10^7). It almost completely corresponds to the well-known Prandtl-Colebrook's formula, which has an implicit form. Numerical values and analytical dependencies between parameters of turbulent flow in hydraulically smooth pipelines are determined. It was established that with an increase in the Reynolds number, the values of both the conditional and absolute thicknesses of the boundary layer decrease, and with the increasing of the pipe diameters, they grow. It is shown that the thickness of the boundary layer depends on the type and magnitude of the roughness of the inner surface of the pipes and it is decisive when other parameters of turbulent flows in pipelines are evaluating.

Keywords: hydraulic calculations, pipelines, turbulent flows.

Стаття надійшла до редакції 12.04.2023